

CMOS 运算放大器设计优化方法研究

2002 年 12 月 1 日

唐长文

zwtang@fudan.edu.cn

复旦大学专用集成电路与系统国家重点实验室

摘要

本文论述了一种采用数学最优化方法—几何规划 (Geometric Programming) 进行两级运算放大器的管子尺寸参数优化的方法。

我们在设计一个确定结构的模拟电路中，许多设计约束条件和设计目标函数往往都是尺寸参数（管子尺寸，偏置电流）的一个多项式函数。我们调管子尺寸参数的设计过程，其实就是在满足所有设计约束的条件下，得到设计目标函数的一个解的过程。通常情况下，通过手工计算和 SPICE 仿真相结合得到的解是一个局部最优解。而本文介绍了一种采用数学最优化方法—几何规划 (Geometric Programming) 来得到设计的全局最优解的方法。

首先，我们根据运算放大器设计要求（单位增益带宽、相位裕量、输入等效噪声、面积、功耗等），通过 CMOS 运算放大器设计一般步骤得到所有设计约束条件不等式、约束等式和目标函数。然后，将所有约束不等式、约束等式和目标函数转换成一个几何规划问题。最后，采用数学优化求解方法—内点法求得一个全局最优解或者无解的结果。文章最后，我们给出了设计要求和 SPICE 仿真的比较结果。

几何规划 (Geometric Programming) 优化设计方法不只适合于两级运算放大器的设计，它同样对于任何满足几何规划条件的问题都适合，比如 Cascode 运算放大器、LC 振荡器、 $\Sigma\Delta$ 调谐器、滤波器设计等等工程优化问题。

一、引言

大规模数字集成电路的设计过程是一个逻辑综合和自动布局布线的过程，该设计方法已经非常成熟。然而模拟电路的自动综合和布局布线始终是我们梦寐以求的，EDA 技术发展到至今，目前还没有一个成熟的模拟电路 CAD 解决方案。在研究领域，许多作者提出了各种各样的优化算法，企图来解决模拟电路的自动综合技术。这些工作主要包括模拟电路图结构、电路版图自动生成。本文论述的是一个对于特定结构的两级运算放大器进行管子宽长比优化的方法。

我们在设计一个确定结构的模拟电路中，许多设计约束条件和设计目标函数往往都是尺寸参数（管子尺寸，偏置电流）的一个多项式函数。我们调管子尺寸参数的设计过程，其实就是在满足所有设计约束的条件下，得到设计目标函数的一个解的过程。通常情况下，通过手工计算和 SPICE 仿真相结合得到的解是一个局部最优解。而本文介绍了一种采用数学最优化方法—几何规划（Geometric Programming）来得到设计的全局最优解的方法。

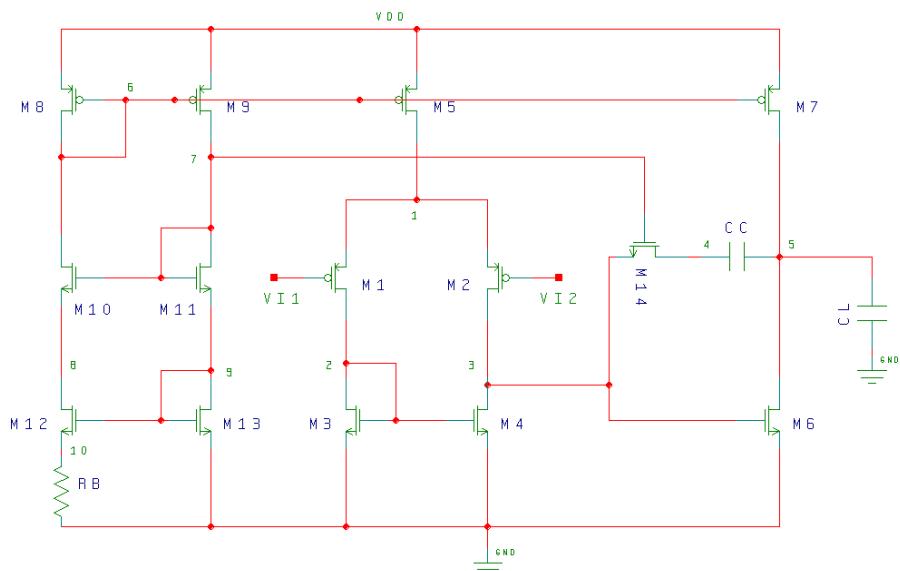


图 1、CMOS 两级运算放大器

1. 两级运算放大器

如图 1 所示，是一个两级 CMOS 运算放大器[1]。它包括一个差分输入级，一个驱动负载电容 C_L 共源放大级，和一个稳定跨导偏置电流电路。该运算放大器作为一个子电路广泛用于模拟 VLSI 中，因此负载电容 C_L 往往是几个皮法，故省去了输出驱动级。

CMOS 两级运算放大器具有许多优点：高电压增益，轨到轨输出动态范围，大共模输入范围，一个密勒补偿电容等等。

CMOS 两级运算放大器的主要缺点是，第二极点（非主极点）是由负载电容和第二级放大器输出阻抗的乘积所确定。这就降低了整个运算放大器的带宽。另外一个缺点是运算放大器存在一个右半平面的零点，该零点是由前馈通路中的补偿电容引起的。值得庆幸的是该极点可以通过选择适当的补偿电阻 R_C 来消除（文章第三部分将详细论述）。补偿电阻是采用一个处于线性区的 NMOS 来实现的，通过调节宽长比和栅源电压来实现对零点的搬移。

上述 CMOS 两级运算放大器有 30 个设计参数：

- 所有管子的宽长， $W_i, L_i, i=1 \dots 14$;
- 电阻 R_B 和补偿电容 C_C

2. 凸优化方法

凸优化问题[2]是满足下面表达式的一个数学最优化问题。

$$\text{Minimize } f_0(x)$$

$$\text{subject to } f_i(x) \leq 1, \quad i = 1, \dots, m,$$

$$a_i^T x = b_i, \quad i = 1, \dots, p,$$

$$x_i > 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

其中 f_0, \dots, f_m 是凸函数。另外凸优化问题必须满足三个附加条件：

- 目标函数是一个凸函数
- 不等式约束函数都是凸函数
- 等式约束函数 $g_i = a_i^T x - b_i$ 是仿射的

凸优化问题理论已经在数学界得到了证明，而其应用在最近几年才得到了蓬勃发展。主要原因是近十年间，适用于通用凸优化问题求解方法—内点法的开发，使得凸函数求解变得非常有效。这些算法能够在几秒中之内求解一个具有上千个变量和几千个约束的凸优化问题。而且其最大的优点是所求得的解是一个全局最优解，并且与初始条件无关。如果凸优化问题的约束条件给得太严格，算法能够报告出该问题不存在最优解。同时给出各个约束不等式的松紧程度。

根据凸优化问题的定义，我们可以看出不是所有的工程优化问题都能够转换成为凸优化问题进行求解。本文我们将介绍如何将一个 CMOS 两级运算放大器转换成一个凸优化问题，并且是一个几何规划问题（文章第二部分将详细论述）。

3. 论文结构

在第二部分，我们将详细介绍一下凸优化问题中的几何规划问题。在第三部分，我们根据运算放大器设计要求（单位增益带宽、相位裕量、输入等效噪声、面积、功耗等），通过 CMOS 运算放大器设计一般步骤得到所有设计约束条件不等式、约束等式和目标函数。在第四部分，将所有约束不等式、约束等式和目标函数转换成一个几何规划问题，并且采用数学优化求解方法—内点法求得一个全局最优解或者无解的结果。文章最后，我们给出了设计要求、几何规划优化和 SPICE 仿真的比较结果。

二、数学最优化方法—几何规划（Geometric Programming）

假设 x_1, \dots, x_n 是 n 个正实变量。我们用 x 表示向量 (x_1, \dots, x_n) ，如果一个函数 f 满足下式，

称 f 是向量 x 的一个多项式函数，

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^t c_k x_1^{\alpha_{1k}} x_2^{\alpha_{2k}} \cdots x_n^{\alpha_{nk}}$$

其中 $c_k \geq 0$, $\alpha_{nk} \in R$ 。 c_k 必须是一个非负数，而 α_{nk} 可以是任何实数，负数或分数。如果 $t=1$ ，只有一个项，称 f 是向量 x 的一个单项式函数。多项式函数是加法、乘法和非负比例三种操作，而单项式函数是乘法和非负比例两种操作。

几何优化[2]是如下形式的一个优化问题：

$$\text{minimize } f_0(x)$$

$$\text{subject to } f_i(x) \leq 1, \quad i = 1, \dots, m,$$

$$g_i(x) = 1, \quad i = 1, \dots, p,$$

$$x_i > 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

其中 f_1, \dots, f_m 是多项式函数， g_1, \dots, g_p 是单项式函数。

许多变形的多项式函数也是应用非常广泛的。例如，假定 f 是一个多项式函数， g 是一个单项式函数，那么约束不等式 $f(x) \leq g(x)$ 可以表示为 $\frac{f(x)}{g(x)} \leq 1$ ，因为 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 是一个多项式函数。同样的，如果 g_1 和 g_2 都是单项式函数，那么约束等式 $g_1(x) = g_2(x)$ 可以表示为 $\frac{g_1(x)}{g_2(x)} = 1$ ，因为 $\frac{g_1(x)}{g_2(x)}$ 是一个单项式函数。

1. 凸型几何优化

一个几何优化问题可以转化称一个凸优化问题：在凸不等式约束和线性等式约束条件下的凸函数的最小值问题。将几何优化问题转换称一个凸函数问题是得到几何优化问题的全局最优结果的关键。

定义新的变量 $y_i = \log x_i$ ，对多项式函数 f 进行对数运算得到，

$$h(y) = \log(f(e^{y_1}, \dots, e^{y_n})) = \log\left(\sum_k^t e^{a_k^T y + b_k}\right)$$

其中 $a_k^T = [\alpha_{1k}, \dots, \alpha_{nk}]$, $b_k = \log c_k$ 。显然, h 是关于新变量 y 的凸函数

我们可以将标准的几何优化问题转换称如下所示的凸优化问题,

$$\text{minimize } \log f_0(e^{y_1}, \dots, e^{y_n})$$

$$\text{subject to } \log f_i(e^{y_1}, \dots, e^{y_n}) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m,$$

$$\log g_i(e^{y_1}, \dots, e^{y_n}) = 0, \quad i = 1, \dots, p,$$

这就是所谓的指类型几何优化问题。我们能够使用有效的内点方法 (Interior-point method) 来求解, 而且求解有完善的二元性, 灵敏度理论依据。

2. 敏感度分析

如下所示, 修改几何优化问题的约束式子的右端,

$$\text{minimize } f_0(x)$$

$$\text{subject to } f_i(x) \leq e^{u_i}, \quad i = 1, \dots, m,$$

$$g_i(x) = e^{v_i}, \quad i = 1, \dots, p,$$

$$x_i > 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

这样我们就能够通过变量 u_i , v_i 来加强和放松约束。

假设 $f_0^*(u, v)$ 表示为关于变量 u_i , v_i 的目标函数。在敏感度分析中, 我们研究 $\log f_0^*$ 对变量 u_i , v_i 偏微分,

$$S_i = \frac{\partial \log f_0^*}{\partial u_i}, \quad T_i = \frac{\partial \log f_0^*}{\partial v_i}, \quad u = 0, v = 0$$

庆幸的是, 在使用内点方法进行几何优化问题求解时, 优化工具会自动计算敏感度。我们没有必要去单独计算。实际上, $f_0^*(u, v)$ 在 $u = 0, v = 0$ 点上的偏微分是优化的二元变量 (dual variables) λ^*, v^* 值, 即 $\log f_0^*$ 在 $u = 0, v = 0$ 点上的剃度。

$$\lambda_i^* = -\frac{\partial \log f_0^*}{\partial u_i}, \quad v_i^* = -\frac{\partial \log f_0^*}{\partial v_i}$$

在实际应用中, 敏感度是非常有用的。 S_i 的值说明了第 i 条约束不等式对目标函数的影响,

如果 $S_i = 0$ ，说明第 i 条约束不等式对目标函数无影响。我们希望 $S_i \leq 0$ ，因为增大 u_i 可以放松第 i 条约束不等式，从而降低优化的目标值。而 T_i 的符号表示可以增大或者减小约束等式 $g_i(x) = e^{v_i}$ 的右端值，来增加或者减小优化的目标值。因此，敏感度说明了约束不等式是否对目标函数有影响，指导我们如何来调整约束来达到好的优化结果。

三、两级运算放大器

我们根据运算放大器设计要求（单位增益带宽、相位裕量、输入等效噪声、面积、功耗等），通过 CMOS 运算放大器设计一般步骤得到所有设计约束条件不等式、等式和目标函数。

1. 直流增益 Adm

图 1. CMOS 运算放大器存在两级：(1)、差分放大器 (M1&M2&M3&M4)；(2)、共源放大器 (M6&M7)

$$\text{第一级增益 } A_1 = -G_{m1}R_{o1} = -g_{m1}(r_{02} // r_{04}),$$

$$\text{第二级增益 } A_2 = -G_{m2}R_{o2} = -g_{m6}(r_{06} // r_{07}),$$

值得注意的是差分放大器（图 2）的增益定义为：

$$A_{dm} = \frac{v_{out}}{v_{in}}$$

这里， $v_{in} = v_{i1} - v_{i2}$ ，当管子 M1 和 M2 相同，M3 和 M4 相同时，输出开路的增益为：

$$\begin{aligned} v_{out1}(o) &= \frac{v_{i1}g_{m1}}{g_{o2} + g_{o4}} - \frac{v_{i2}g_{m2}}{g_{o2} + g_{o4}} \\ &= \frac{g_{m1}(v_{i1} - v_{i2})}{g_{o2} + g_{o4}} \end{aligned}$$

$$A_{dm}(o) = \frac{v_{out1}(o)}{v_{i1} - v_{i2}} = \frac{g_{m1}}{g_{o2} + g_{o4}}$$

整个运算放大器的增益：

$$A_{overall} = A_1 \cdot A_2 = \frac{g_{m1}g_{m6}}{(g_{o2} + g_{o4})(g_{o6} + g_{o7})} \quad (1)$$

2. 转换速率

转换速率 (Slew Rate) 是大信号输入时，电流输出的最大驱动能力。

在该运算放大器中(图 3)，偏置电流 I_{DS5} 通过管子 M2 或者 M1,M3,M4，对电容 C_C 进行充电或者放电。当 $v_{i1} > v_{i2}$ 时，电流 I_{DS5} 通过管子 M2 对电容 C_C 充电；当 $v_{i1} < v_{i2}$ 时，电流 I_{DS5} 通过管子 M1 和 M3，电流镜 M3&M4 使得 M4 对电容 C_C 放电。另外，偏置电流 I_{DS7} 通过管子 M7 或者偏置电流 I_{DS6} 通过管子 M6，对电容 $C_C + C_L$ 进行充电或者放电。运算放大器的转换率定义为两者中的最小一个。

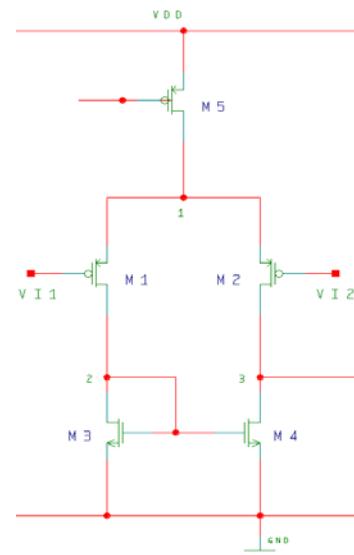


图 2、差分放大器

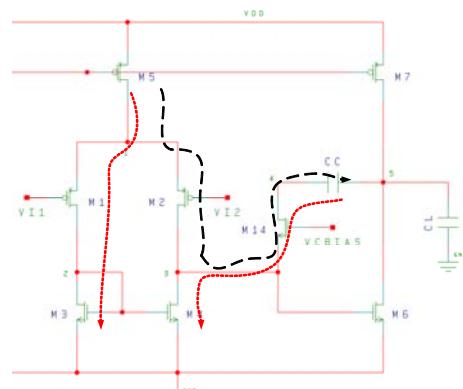


图 3、转换速率

定义转换速率为 SR:

$$\bullet \quad SR \equiv \frac{dv_{out}}{dt} \Big|_{\max} = \frac{I_{C_C} \Big|_{\max}}{C_C} = \frac{I_{DS5}}{C_C}$$

根据电荷方程 $q = CV$, $I = dq/dt = C(dV/dt)$

$$\therefore I_{DS5} = 2I_{DS1} \quad \therefore SR = \frac{2I_{DS1}}{C_C}$$

从后面推倒的式子 (5) 单位增益带宽可以得到 $C_C = g_{m1}/\omega_u$

$$\therefore SR = \frac{2I_{DS1}\omega_u}{g_{m1}} = \frac{2I_{DS1}\omega_u}{\sqrt{2\mu_p C_{ox}(\frac{W}{L})_1 I_{DS1}}} = \sqrt{\frac{2I_{DS1}}{\mu_p C_{ox}(\frac{W}{L})_1}} \omega_u = V_{eff1} \omega_u$$

$$\text{其中 } V_{eff1} = |V_{GS}| - |V_{th}| = \sqrt{\frac{2I_{DS1}}{\mu_p C_{ox}(\frac{W}{L})_1}}$$

因此，提高两级运算放大器转换速率的一种方法是尽可能增大管子 M1 的有效电压 V_{eff1} 。其实这也是为什么选用 PMOS 管作为输入管的原因之一。

$$\bullet \quad SR \equiv \frac{dv_{out}}{dt} \Big|_{\max} = \frac{I_{C_C} \Big|_{\max}}{C_C} = \frac{I_{DS7}}{C_C + C_L}$$

该个运算放大器的转换率 $SR = \min \left\{ \frac{2I_{DS1}}{C_C}, \frac{I_{DS7}}{C_C + C_L} \right\}$

3. 静态功耗

运算放大器的静态功耗:

$$P_{static} = (V_{dd} - V_{ss})(I_{DS8} + I_{DS9} + I_{DS5} + I_{DS7})$$

静态功耗确定了整个电路的静态电流最大值为 (假定静态功耗 $\leq 5\text{mW}$, 电源电压 3.3V):

$$I_{DC} = \frac{P_{Static}}{V_{dd} - V_{ss}} = \frac{5\text{mW}}{3.3\text{V} - 0\text{V}} \approx 1.5\text{mA} \quad (2)$$

我们将该电流分配到电路的不同的地方去。例如, $100\mu\text{A}$ 给偏置电路, $1400\mu\text{A}$ 给两级放大电路。这里完全是根据设计人员的经验来确定, 有可能电流的分配并不能使整个电路达到全局最优。

4. 输入失调电压

当 $V_{i1} = V_{i2} = (V_{dd} - V_{ss})/2$ 时,

$$I_{DS1} = I_{DS2}, \text{ 所以, } V_{DS3} = V_{DS4}, V_{GS6} = V_{GS3} = V_{GS4}$$

如果电源电压是 3.3V，输出的动态幅度是 3.3V，直流电压增益是 10^4 倍，则最大输入电压幅度是 $3.3V / A_{total} = 3.3V / 10^4 = 0.33mV$ ，而如果输入失调电压为 0.5mV。这就意味着 0.5mv 的输入失调电压足以使得 M6 或 M7 进入线性区。

$$\because I_{DS1} = I_{DS2}, \quad I_{DS6} = I_{DS7}, \quad V_{GS6} = V_{GS3} = V_{GS4}$$

$$\therefore I_{DS6} = \frac{1}{2} \mu_n C_{ox} \left(\frac{W}{L} \right)_6 (V_{GS6} - V_{th})^2$$

$$I_{DS3} = \frac{1}{2} \mu_n C_{ox} \left(\frac{W}{L} \right)_3 (V_{GS3} - V_{th})^2$$

$$\text{故, } \left(\frac{W}{L} \right)_3 = \left(\frac{W}{L} \right)_4 = \frac{I_{DS3}}{I_{DS6}} \times \left(\frac{W}{L} \right)_6 = \frac{I_{DS5}}{2 \times I_{DS7}} \times \left(\frac{W}{L} \right)_6$$

为了使 M3、M4 和 M6 完全匹配，选择 $L_3 = L_4 = L_6$

$$\text{所以, } W_3 = W_4 = \left(\frac{I_{DS5}}{2 \times I_{DS7}} \right) \times W_6 \quad (3)$$

M3, M4 和 M6 的尺寸取决于两级放大器之间的电流的分配。

为了减小负载电容对噪声的贡献，我们也许希望 L_3 和 L_4 取最小值。然而，为了得到更高的 g_m ，我们也许希望 L_6 保持最小值。这里，我们牺牲一下输入失调电压等待后面单位增益带宽来进一步考虑。

5. 等效输入噪声

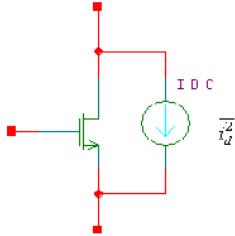


图 4、NMOS 管噪声电流源

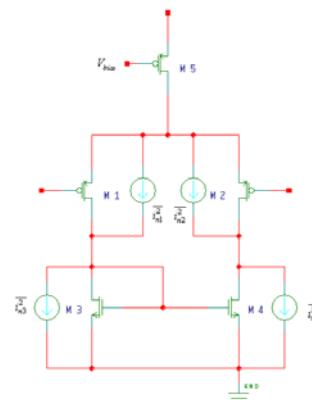


图 5、等效输入噪声

我们知道每一个晶体管都存在噪声电流源（图 4），其功率谱密度为

$$S_{i_{DS}}^2 = 4KT \left(\frac{2}{3} g_m \right) + \frac{K_f g_m^2}{fWLC_{ox}}$$

热噪声 1/f 噪声

我们忽略第二级的等效输入噪声，因为第二级的输入噪声要除以第一级的增益。
如图 5 是输入级的等效输入噪声示意图。

$$v_{n,out} = (i_{n1} + i_{n3} + i_{n2} + i_{n4})(g_{o2} + g_{o4})$$

输出噪声功率谱密度为

$$S_{n,out}^2 = (S_{i_{DS1}}^2 + S_{i_{DS2}}^2 + S_{i_{DS3}}^2 + S_{i_{DS4}}^2)(g_{o2} + g_{o4})^2$$

等效输入噪声功率谱密度为

$$\begin{aligned} S_{n,in}^2 &= \frac{(S_{i_{DS1}}^2 + S_{i_{DS2}}^2 + S_{i_{DS3}}^2 + S_{i_{DS4}}^2)(g_{o2} + g_{o4})^2}{g_{m1}^2(g_{o2} + g_{o4})^2} \\ &= \frac{S_{i_{DS1}}^2 + S_{i_{DS2}}^2 + S_{i_{DS3}}^2 + S_{i_{DS4}}^2}{g_{m1}^2} \\ \frac{4KT}{3} \frac{2}{(g_{m1} + g_{m2} + g_{m3} + g_{m4}) + \frac{K_{fp}}{C_{ox}W_1L_1f}g_{m1}^2 + \frac{K_{fp}}{C_{ox}W_2L_2f}g_{m2}^2 + \frac{K_{fn}}{C_{ox}W_3L_3f}g_{m3}^2 + \frac{K_{fn}}{C_{ox}W_4L_4f}g_{m4}^2}{g_{m1}^2} \end{aligned}$$

$$\text{等效输入噪声功率谱密度 } S_{n,in}^2 = \frac{\alpha}{f} + \beta \quad (4)$$

$$(g_{m1} = g_{m2} = \sqrt{2\mu_p C_{ox}(\frac{W}{L})_1 I_{DS1}}, \quad g_{m3} = g_{m4} = \sqrt{2\mu_n C_{ox}(\frac{W}{L})_3 I_{DS3}}, \quad I_{D1} = I_{D3})$$

$$\text{其中 } \alpha = \frac{2K_{fp}}{C_{ox}W_1L_1} \left(1 + \frac{K_{fn}\mu_n L_1^2}{K_{fp}\mu_p L_3^2} \right), \quad \beta = \frac{16KT}{3\sqrt{2\mu_p C_{ox}(\frac{W}{L})_1 I_{DS1}}} \left(1 + \sqrt{\frac{\mu_n(\frac{W}{L})_3}{\mu_p(\frac{W}{L})_1}} \right)$$

因此，等效输入噪声只是 L_1, L_3, W_1 ，和 I_{DS1} 的函数，假定 L_1, L_3 都选定最小值。则它只是 W_1 的函数。增加 W_1 值，可以降低输入噪声，但同时也会增大寄生电容。

等效输入噪声功率谱密度要求 $S_{n,in}^2 \leq S_{\max}^2$

在频率范围 $[f_0, f_1]$ 下，RMS 噪声电压 V_{noise} 是等效输入噪声功率谱密度在该频率范围内进行积分，

$$V_{noise}^2 = \int_{f_0}^{f_1} S_{n,in}^2(f) df = \alpha \log(f_1/f_0) + \beta(f_1 - f_0) \leq V_{\max}^2$$

6. 单位增益带宽和相位裕量

假设运放只有两个极点（图 6）。（实际上，会有两个以上的极点，同时还会在右半平面或者左半平面的零点）。

由于密勒补偿电容 C_c 的存在， p_1 和 p_2 将会分开得很远（在密勒电容补偿中将详细论述）。
假定 $|\omega_{p_1}| \ll |\omega_{p_2}|$ ，这样在单位增益带宽频率 ω_u 处第一极点引入 -90° 相移，整个相位裕量

是 60° 。所以第二极点在单位增益带宽频率处的相移是 -30° 。

$$PM \geq 60^\circ, \quad \varphi_1 \approx 90^\circ,$$

$$\varphi_2 = 180^\circ - PM - \varphi_1 \leq 30^\circ$$

$$\frac{\omega_u}{\omega_{p_2}} \leq \tan 30^\circ = 0.577 \Rightarrow \frac{\omega_{p_2}}{\omega_u} \geq 1.73$$

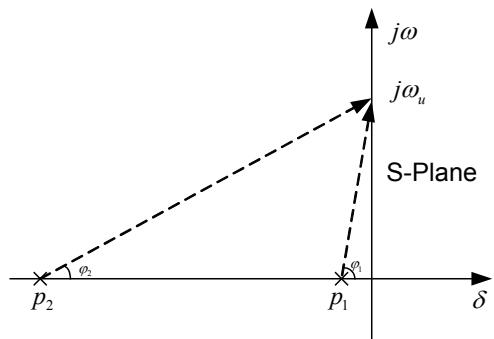


图 6、S 平面中的两个极点

设定 $SF = \frac{\omega_{p_2}}{\omega_u}$, 我们知道 $\omega_u = A_o \cdot \omega_{p_1}$, 因此,

$$\frac{\omega_{p_2}}{\omega_{p_1}} = SF \times A_o$$

$$\text{另外, 主极点 } \omega_{p_1} \cong \frac{g_{o2} + g_{o4}}{\left(1 + \frac{g_{m6}}{g_{o6} + g_{o7}}\right)C_C} \cong \frac{g_{o2} + g_{o4}}{\left(\frac{g_{m6}}{g_{o6} + g_{o7}}\right)C_C}, \text{ 开环增益 } A_o = \frac{g_{m1}}{g_{o2} + g_{o4}} \cdot \frac{g_{m6}}{g_{o6} + g_{o7}}$$

$$\omega_u = A_o \cdot \omega_{p_1} = \frac{g_{m1}}{g_{o2} + g_{o4}} \cdot \frac{g_{m6}}{g_{o6} + g_{o7}} \cdot \frac{\frac{g_{o2} + g_{o4}}{g_{m6}}}{\frac{g_{m6}}{g_{o6} + g_{o7}} C_C} = \frac{g_{m1}}{C_C} \quad (5)$$

为得到高的单位增益带宽，应该使非主极点 p_2 最大化。

$$\text{两个极点系统相位裕量 } PM = 90^\circ - \arctan \frac{\omega_u}{\omega_{p_2}},$$

$$(a) \ PM = 45^\circ, \Rightarrow \omega_{p_2} = \omega_u$$

$$(b) \quad PM = 60^\circ, \Rightarrow \omega_{p_2} = 1.7\omega_u$$

$$(c) \quad PM = 75^\circ, \Rightarrow \omega_{p_2} = 3.2\omega_u$$

$$(d) \quad PM = 90^\circ, \Rightarrow \omega_{p_2} = \infty \cdot \omega_u$$

我们可以看到单位增益带宽 ω_u 和第二非主极点

ω_{p_2} 的分离程度取决于相位裕量 PM 的大小。另外考虑到更高非主极点的存在，我们应该将相位裕量设计得大一些。

如图 7 所示得电路中存在至少三个极点(第四个极点存在 C_C 与 M_{14} 的消除正向零点回路中):

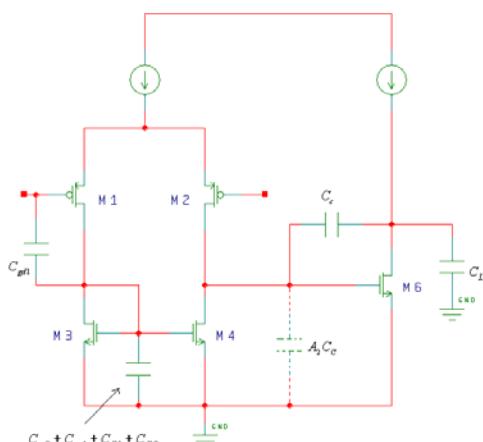


图 7、主极点、镜像极点和输出极点

(1) 镜像极点：

$$\omega_{p_{\text{Mirror}}} = \frac{g_{m3}}{C_{gs3} + C_{gs4} + C_{db1} + C_{db3} + C_{gd1}} \approx \frac{g_{m3}}{2C_{gs3}} \approx \frac{\omega_T}{2}$$

(2) 补偿电容引入的主极点：

$$\omega_{p_1} = \frac{G_{o1}}{(A_2+1)C_{C'}} = \frac{g_{o2} + g_{o4}}{(A_2+1)C_{C'}},$$

其中密勒电容 $C_{C'} = C_C + C_{gd6}$ 因为 $A_2 C_{C'}$ 是一个非常大的电容值，因此由于密勒效应该极点是一个主极点。

(3) 输出极点：

该极点主要是由输出电容 C_L 引起的。参考[3]第 172 页。

$$\begin{aligned} \omega_{p_{\text{out}}} &= \frac{G_{o2}}{C_{TL} + C_{eq}} = \frac{g_{m6} \frac{C_{C'}}{C_{C'} + C_p}}{C_{TL} + \frac{C_{C'} C_p}{C_{C'} + C_p}}, \\ &= \frac{g_{m6} C_{C'}}{C_{TL} C_{C'} + C_{TL} C_p + C_{C'} C_p}, \quad \text{其中 M6 槽极电容 } C_p = C_{gs6} + C_{db4} + C_{db2} + C_{gd2} + C_{gd4}, \end{aligned}$$

负载 $C_{TL} = C_L + C_{db6}$ ，密勒电容 $C_{C'} = C_C + C_{gd6}$

$$\because C_p \ll C_{TL} \therefore \omega_{p_{\text{out}}} \approx \frac{g_{m6} C_{C'}}{C_{TL} C_{C'} + C_{TL} C_p}, \text{ 而且} \because C_{C'} \gg C_p \quad C_L \gg C_{gd6} \quad \therefore \omega_{p_{\text{out}}} \approx \frac{g_{m6}}{C_L}$$

与 $\omega_{p_{\text{Mirror}}}$ 相比，因为 $C_T \gg C_{gs3}$ ，所以 $\omega_{p_{\text{out}}} = \frac{g_{m6}}{C_L} < \omega_{p_{\text{Mirror}}} = \frac{g_{m3}}{2C_{gs3}}$

因此， $\omega_{p_{\text{out}}}$ 是第二极点。

第一极点： $\omega_{p_1} = \frac{g_{o2} + g_{o4}}{(A_2+1)C_C}$ ，第二极点： $\omega_{p_2} = \frac{g_{m6}}{C_L}$ ，第三极点： $\omega_{p_3} \approx \frac{g_{m3}}{2C_{gs3}} \approx \frac{\omega_T}{2}$

为了使单位增益带宽 ω_u 最大化，我们应该将第二极点 $\omega_{p_2} = \frac{g_{m6}}{C_L}$ 最大。换句话说， g_{m6}

要最大，则 M6 的宽度 W_6 和其电容要增加。根据式子 (3)， W_3 和 W_4 也会增加，这也就意

味着 $\omega_{p_3} \approx \frac{g_{m3}}{2C_{gs3}} \approx \frac{\omega_T}{2}$ 将减小。因此，提高 ω_{p_2} ， ω_{p_3} 减小，导致相位裕量减小。

根据上面的分析，我们能够知道 ω_{p_2} 会有一个最优值。下面让我们来分析一下 ω_{p_2} 和 ω_{p_3}

是如何随着设计参数 I_{DS3} , I_{DS6} 和 W_6 变化的。

$$\omega_{p_2} = \frac{g_{m6}}{C_L} \propto \sqrt{W_6 \times I_{DS6}} \quad (6)$$

$$\omega_{p_3} = \frac{g_{m3}}{2C_{gs3}} \propto \frac{\sqrt{W_3 \times I_{DS3}}}{W_3} = \sqrt{\frac{I_{DS3}}{W_3}}$$

$$\frac{\omega_{p_3}}{\omega_{p_2}} \propto \sqrt{\frac{I_{DS3}}{I_{DS6}}} \Big/ \sqrt{W_3 W_6}, \text{ 而式子 (3) } W_3 = \left(\frac{I_{DS3}}{I_{DS6}}\right) \times W_6 \text{ (消除失调电压)}$$

$$\therefore \frac{\omega_{p_3}}{\omega_{p_2}} \propto \sqrt{\frac{I_{DS3}}{I_{DS6}}} \Big/ \sqrt{\frac{I_{DS3}}{I_{DS6}} W_6^2} = \frac{1}{W_6}$$

$$\omega_{p_2} \propto \sqrt{W_6 \times I_{DS6}} = \frac{\sqrt{I_{DS6}}}{\sqrt{\frac{\omega_{p_3}}{\omega_{p_2}}}} \text{ 或者 } \omega_{p_2} = \frac{\omega_{p_{2\max}}}{\sqrt{\frac{\omega_{p_3}}{\omega_{p_2}}}} \quad (\omega_{p_{2\max}} \text{ 只是 } I_{DS6} \text{ 的函数}) \quad (7)$$

根据式子 (7), 我们可以找到一个最优的 $\frac{\omega_{p_3}}{\omega_{p_2}}$, 使得运算放大器的带宽最大。

假定 $\frac{\omega_{p_2}}{\omega_u} = 2$, 则意味者 ω_{p_2} 对相位的贡献是 $\arctan \frac{\omega_u}{\omega_{p_2}} = 90^\circ - \arctan \frac{\omega_{p_2}}{\omega_u} = 26.5^\circ$

$$\arctan \frac{\omega_u}{\omega_{p_3}} = 180^\circ - PM - \arctan \frac{\omega_u}{\omega_{p_1}} - \arctan \frac{\omega_u}{\omega_{p_2}}$$

$$90^\circ - \arctan \frac{\omega_{p_3}}{\omega_u} = 180^\circ - PM - (90^\circ - \arctan \frac{\omega_{p_1}}{\omega_u}) - (90^\circ - \arctan \frac{\omega_{p_2}}{\omega_u})$$

$$\arctan \frac{\omega_{p_3}}{\omega_u} = 90^\circ + PM - \arctan \frac{\omega_{p_1}}{\omega_u} - \arctan \frac{\omega_{p_2}}{\omega_u}$$

$$= 90^\circ + 60^\circ - 90^\circ - 26.5^\circ = 86.5^\circ$$

$$\therefore \frac{\omega_{p_3}}{\omega_u} = \tan 86.5^\circ = 16.3, \quad \frac{\omega_{p_3}}{\omega_{p_2}} = \frac{\omega_{p_3}}{\omega_u} \times \frac{\omega_u}{\omega_{p_2}} = 8.17$$

$$\frac{\omega_{p_3}}{\omega_{p_2}} = \tan(90^\circ + PM - \arctan \frac{\omega_{p_1}}{\omega_u} - \arctan \frac{\omega_{p_2}}{\omega_u}) \times \frac{\omega_u}{\omega_{p_2}}$$

$$K = \frac{\omega_u}{\omega_{p_{2\max}}} = \frac{1}{2 \times \sqrt{\frac{\omega_{p_3}}{\omega_{p_2}}}} = \frac{1}{2 \times \sqrt{\frac{\omega_{p_3}}{\omega_u} \times \frac{\omega_u}{\omega_{p_2}}}} = \frac{1}{2 \times \sqrt{\tan(90^\circ + PM - \arctan \frac{\omega_{p_1}}{\omega_u} - \arctan \frac{\omega_{p_2}}{\omega_u}) \times \frac{\omega_u}{\omega_{p_2}}}}$$

$$PM = 60^\circ$$

$\frac{\omega_{p_2}}{\omega_u}$	$\frac{\omega_{p_3}}{\omega_{p_2}}$	$K = \frac{\omega_u}{\omega_{p_{2\max}}}$
2	8.17	0.175
2.5	2.77	0.240
3	1.63	0.261
3.5	1.14	0.267
3.73	1	0.268

通过这种方式，我们可以找到 $\frac{\omega_{p_2}}{\omega_u} = 3.73$, $\frac{\omega_{p_3}}{\omega_{p_2}} = 1$ 时，使得 ω_u 最大。因为还存在更高极点的影响，我们在此选择 $\frac{\omega_{p_2}}{\omega_u} = 3$, 则 $\frac{\omega_{p_3}}{\omega_{p_2}} = 1.63$ 。

7. 消除密勒补偿电容 C_C 前向耦合引入的右半平面 (RHP) 零点

密勒电容 C_C (图 8) 实现了第一极点 (主极点) 的补偿。

$$\text{第一极点: } \omega_{p_1} = \frac{g_{o2} + g_{o4}}{(A_2 + 1)C_c}$$

$$\text{单位增益带宽 } \omega_u = A_0 \cdot \omega_{p_1}$$

NMOS 管 M14 的 $V_{DS}=0$, 不存在直流电流通过该管子，因此其工作在线性区，相当于一个电阻 R_C 。

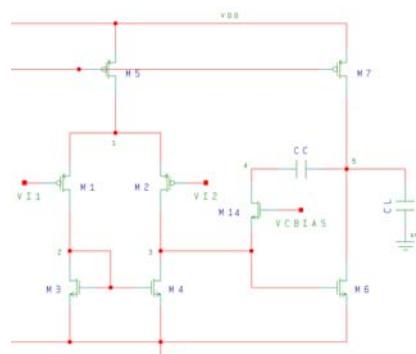


图 8、频率补偿

$$R_C = r_{ds14} = \frac{1}{\mu_n C_{ox} \left(\frac{W}{L}\right)_{14} V_{eff14}}$$

该电阻的作用是消除由于密勒电容 C_C 引入的右半平面零点。

图 9 是图 8 频率补偿的小信号模型。为了分析的需要，首先假设 $R_C=0$, 采用节点电流分析法，可以得到以下两个方程。

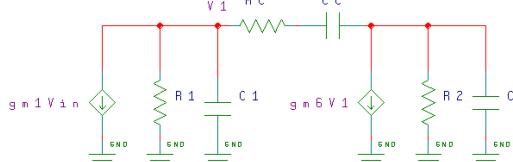


图 9、零点补偿小信号模型

$$g_{m1}V_{in1} + V_1 \cdot \left(\frac{1}{R_1} + sC_1\right) + (V_1 - V_{out}) \cdot sC_C = 0$$

$$g_{m6}V_1 + V_{out} \cdot \left(\frac{1}{R_2} + sC_2\right) + (V_{out} - V_1) \cdot sC_C = 0$$

联解上述两个方程可得：

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{g_{m1}g_{m6}R_1R_2(1 - \frac{sC_C}{g_{m6}})}{a_2s^2 + a_1s + 1} \quad (8)$$

其中 $a_2 = R_1R_2(C_1C_2 + C_1C_C + C_2C_C)$, $a_1 = (C_1 + C_C)R_1 + (C_2 + C_C)R_2 + g_{m6}R_1R_2C_C$

在实际电路中，两个极点是相距很远的，即 $\omega_{p_2} \gg \omega_{p_1}$ 。

$$\begin{aligned} \text{则 } H(s) &= \left(1 - \frac{s}{\omega_{p_1}}\right)\left(1 - \frac{s}{\omega_{p_2}}\right) = 1 - \frac{s}{\omega_{p_1}} + \frac{s^2}{\omega_{p_1}\omega_{p_2}} \\ \therefore \text{ 主极点 } \omega_{p_1} &= -\frac{1}{a} = \frac{-1}{(C_1 + C_C)R_1 + (C_2 + C_C)R_2 + g_{m6}R_1R_2C_C} \\ \text{C}_2 \gg \text{C}_1, \text{C}_C \gg \text{C}_1 &= \frac{-1}{R_1[C_1 + C_C(1 + g_{m6}R_2)] + (C_2 + C_C)R_2} \\ &\approx \frac{-1}{R_1C_C(1 + g_{m6}R_2)} = \frac{-1}{R_1C_C(1 + A_2)} \quad (\text{密勒电容效应}) \\ &\approx \frac{-1}{g_{m6}R_1R_2C_C} \end{aligned}$$

$$\text{第二非主极点 } \omega_{p_2} = \frac{1}{\omega_{p_1} \cdot a_2} \approx \frac{-g_{m6}C_C}{C_1C_2 + C_1C_C + C_2C_C} \approx \frac{-g_{m6}}{C_1 + C_2}$$

式子 (8) 中存在一个右半平面零点 $\omega_z = \frac{g_{m6}}{C_C}$ 。该零点是由于有了通过 C_C 的正馈通路所产

生的。由于右半平面零点将引入负的相位平移（相位裕量减小），使得运放稳定性变差。

图 10 (a) 是该运算放大器的传递函数的极点—零点图，它说明了极点和零点从其未补偿时的位置向补偿后的位置移动的情况[4]。主极点 ω_{p_1} 向低频方向移动，第二极点 ω_{p_2} 向高频方向移动，而右半平面的零点从无穷向低频移动。图 10(b) 为补偿前后的波特幅频特性。在 $|H(j\omega)|$ 变化到小于 1 前，第二极点不会影响其幅值。

对于运算放大器进行的补偿的目的是要移动全部的零点和除主极点外的其他极点，使得他们远远超过单位增益带宽频率，得到如图 10 (c) 所示的波特相位特性。

增大密勒电容 C_C ，并不能够起到主极点和零点的分离的作用。相反，减小了主极点和零点。然而，我们可以考虑引入一个电阻 R_c 来消除该右半平面零点。

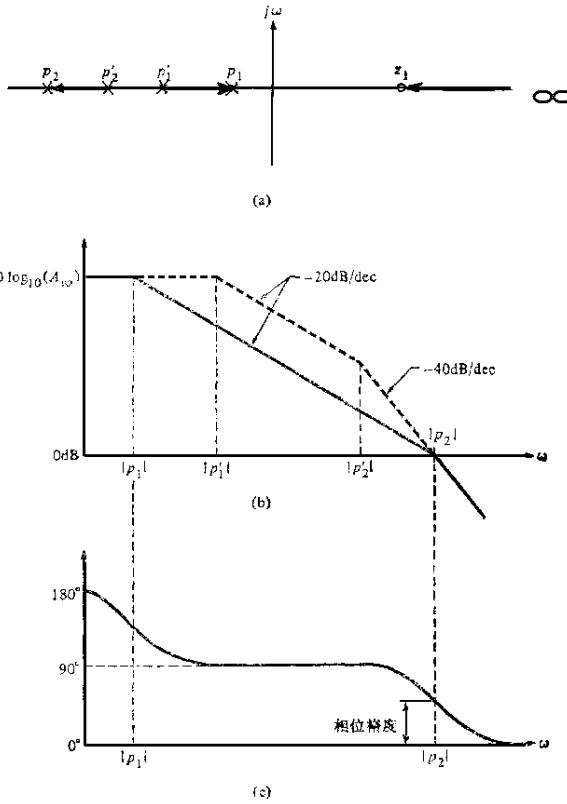


图 10、(a) 密勒补偿电容 C_C 引起的根的移动轨迹
 (b) 密勒补偿前后波特幅值图
 (c) 密勒补偿后波特相位图

下面我们来分析一下 R_C 是如何来消除右半平面零点的。同样采用节点电流分析法，可以得到以下两个方程。

$$g_{m1}V_{in1} + V_1 \cdot \left(\frac{1}{R_1} + sC_1\right) + (V_1 - V_{out}) \cdot \frac{1}{\frac{1}{R_C} + sC_C} = 0$$

$$g_{m6}V_1 + V_{out} \cdot \left(\frac{1}{R_2} + sC_2\right) + (V_{out} - V_1) \cdot \frac{1}{\frac{1}{R_C} + sC_C} = 0$$

联解上述两个方程可得：

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{b\{(1-s[(\frac{C_C}{g_{m6}})-R_C C_C])\}}{a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + 1} \quad (9)$$

其中 $a_3 = R_1 R_2 R_C C_1 C_2 C_C$, $a_2 = R_1 R_2 (C_1 C_2 + C_C C_1 + C_C C_2) + R_C C_C (R_1 C_1 + R_2 C_2)$

$$a_1 = (C_2 + C_C)R_2 + (C_1 + C_C)R_1 + g_{m6}R_1 R_2 C_C + R_C C_C, \quad b = g_{m1}g_{m6}R_1 R_2$$

$\because R_C \ll R_1, R_2$, 并且极点分布比较分散。则式子 (9) 的极点分别近似为

$$\omega_{p_1} \approx \frac{-1}{R_1 C_C (1 + g_{m6} R_2)} \approx \frac{-1}{g_{m6} R_2 R_1 C_C} \quad (\text{密勒效应, 主极点})$$

$$\omega_{p_2} \approx \frac{-g_{m6} C_C}{C_1 C_2 + C_1 C_C + C_2 C_C} \approx \frac{-g_{m6}}{C_1 + C_2} \quad (\text{负载电容, 第二极点})$$

$$\omega_{p_3} = \frac{-1}{R_C C_1} \quad (\text{正馈通路, 第三极点})$$

$$\text{零点 } \omega_z = \frac{1}{C_C \left(\frac{1}{g_{m6}} - R_C \right)} \quad (\text{正馈通路, 零点})$$

电阻 R_C 可以单独控制零点的位置，主要有一下几种方法。

I、 消除零点, R_C 必须等于 $\frac{1}{g_{m6}}$ 。

II、 把零点从右半平面移动左半平面，并且落在第二极点 ω_{p_2} 上。这样，输出负载电容引起的极点就去除掉了。这样做必须满足条件：

$$\omega_{z1} = \omega_{p_2} \rightarrow \frac{1}{C_C \left(\frac{1}{g_{m6}} - R_C \right)} = \frac{-g_{m6}}{C_1 + C_2}$$

得到电阻值为

$$R_C = \frac{1}{g_{m6}} \left(1 + \frac{C_1 + C_2}{C_C} \right) \quad (10)$$

方法 II 上述的成立必须再满足，

$$\begin{aligned} |\omega_{p_3}| > |\omega_u| &= A_v(0) \cdot |\omega_{p_1}| = \frac{A_v(0)}{g_{m6} R_2 R_1 C_C} = \frac{g_{m1} R_1 g_{m6} R_2}{g_{m6} R_2 R_1 C_C} = \frac{g_{m1}}{C_C} \\ \frac{1}{R_C C_1} > \frac{g_{m1}}{C_C} \end{aligned} \quad (11)$$

将式子 (10) 代入是式子 (11) 得，

$$g_{m6} C_C^2 > g_{m1} C_1 C_2 + g_{m1} C_1 C_C + g_{m1} C_1^2 > g_{m1} C_1 C_2$$

$$C_C > \left[\frac{g_{m1} C_1 C_2}{g_{m6}} \right]^{0.5}$$

III、 把零点从右半平面移动左半平面，并且使其略微大于单位增益带宽频率 ω_u 。比如，

超过 20%。

$$\omega_z > 1.2\omega_u$$

$$\therefore R_C \gg \frac{1}{g_{m6}} \quad \rightarrow \quad \omega_z \approx \frac{-1}{R_C C_C}, \quad \text{并且} \quad \omega_u \approx \frac{-g_{m1}}{C_C}$$

$$\therefore R_C \approx \frac{1}{1.2g_{m1}}$$

8. 独立于工艺和温度的零点补偿

根据上述消除零点补偿的分析，我们已经得到了单位增益带宽，第二极点和零点的值分别是：

$$\omega_u = \frac{g_{m1}}{C_C}, \quad \omega_{p_2} = \frac{g_{m6}}{C_1 + C_2} \text{ 和 } \omega_z = \frac{1}{C_C \left(\frac{1}{g_{m6}} - R_C \right)}$$

可以知道 ω_u 与输入管子 M1 的跨导 g_{m1} 成正比, ω_{p_2} 与驱动管子 M6 的跨导 g_{m6} 成正比。而跨导之比 g_{m6}/g_{m1} 对于不同的工艺和温度是相对不变的, 只取决于同样的偏置网络。我们只要使得 R_C 与 $1/g_{m6}$ 成线性比例关系, 这样零点 ω_z 与单位增益带宽 ω_u 和第二极点 ω_{p_2} 的比值是与工艺和温度无关的。问题在于如何做到 R_C 与 $1/g_{m6}$ 成线性比例关系, 且与工艺和温度无关。在实际电路中 R_C 是由一个处在线性区的 NMOS 管 M14 实现的, 也就是需要它的有效栅源电压 (V_{eff14}) 与 M6 的有效栅源电压 (V_{eff6}) 成线性比例关系。

$$R_C = r_{ds14} = \frac{1}{\mu_n C_{ox} \left(\frac{W}{L}\right)_{14} V_{eff14}}$$

而

$$g_{m6} = \mu_n C_{ox} \left(\frac{W}{L} \right)_6 V_{eff\,6}$$

$$\text{因此, } R_C g_{m6} = \frac{\left(\frac{W}{L}\right)_6 V_{eff\ 6}}{\left(\frac{W}{L}\right)_{14} V_{eff\ 14}} \quad (12)$$

只要 $\frac{V_{eff6}}{V_{eff14}}$ 是与工艺和温度无关的，就能够保

证 $R_C g_m 6$ 与工艺和温度无关。这就要使得管子 M14 与管子 M6 具有相同的 V_{GS} 电压值。

下面分析一下图 11 电路是如何保证管子 M14 与管子 M6 具有相同的 V_{GS} 电压值的。

首先，有必要使得节点电压 $V_a=V_b$ ，如何才能呢？这样要使得 $V_{eff13}=V_{eff6}$ ，

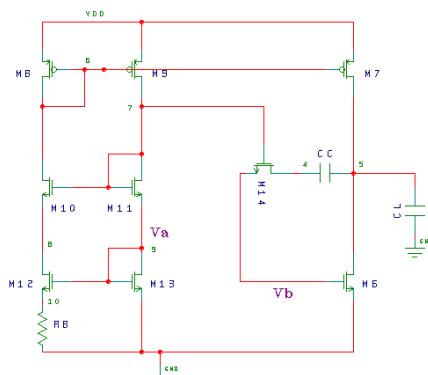


图 11、 $V_a=V_b$ 的偏置电路

$$\sqrt{\frac{2I_{DS6}}{\mu_n C_{ox} \left(\frac{W}{L}\right)_6}} = \sqrt{\frac{2I_{DS13}}{\mu_n C_{ox} \left(\frac{W}{L}\right)_{13}}}$$

$\frac{I_{DS6}}{I_{DS13}} = \frac{\left(\frac{W}{L}\right)_6}{\left(\frac{W}{L}\right)_{13}}$, 而电流 $I_{DS6}=I_{DS7}$, $I_{DS13}=I_{DS9}$, 管子 M7 与 M9 是电流镜

有 $\frac{I_{DS7}}{I_{DS9}} = \frac{\left(\frac{W}{L}\right)_7}{\left(\frac{W}{L}\right)_9}, \rightarrow \frac{\left(\frac{W}{L}\right)_6}{\left(\frac{W}{L}\right)_{13}} = \frac{\left(\frac{W}{L}\right)_7}{\left(\frac{W}{L}\right)_9}$ (13)

管子 M6, M7, M9 和 M13 的宽长能够保证关系式 (13), 这样 $V_{eff13}=V_{eff6}$ 就能够得到保证。也即 $V_a=V_b$ 。管子 M14 与 M11 的栅级连接在一起, 因此 $V_{GS14}=V_{GS11} \rightarrow V_{eff14}=V_{eff11}$ 。

$$\because I_{DS13} = I_{DS11} \quad \therefore \frac{V_{eff6}}{V_{eff14}} = \frac{V_{eff13}}{V_{eff11}} = \frac{\sqrt{\frac{2I_{DS13}}{\mu_n C_{ox} \left(\frac{W}{L}\right)_{13}}}}{\sqrt{\frac{2I_{DS11}}{\mu_n C_{ox} \left(\frac{W}{L}\right)_{11}}}} = \sqrt{\frac{\left(\frac{W}{L}\right)_{11}}{\left(\frac{W}{L}\right)_{13}}} \quad (14)$$

将式子 (14) 代入式子 (12) 得,

$$R_C g_m 6 = \frac{\left(\frac{W}{L}\right)_6}{\left(\frac{W}{L}\right)_{14}} \sqrt{\frac{\left(\frac{W}{L}\right)_{11}}{\left(\frac{W}{L}\right)_{13}}}$$

$R_C g_m 6$ 只与管子得宽长比有关, 而与工艺和温度无关。

9. 偏置电路

两级运算放大器的偏置电路如图 12 所示。管子 M8 与 M9

构成了一个电流镜, 几何尺寸 $\left(\frac{W}{L}\right)_8 = \left(\frac{W}{L}\right)_9$ 使得两边的电流

相等, $I_{DS8} = I_{DS9}$ 。

管子 M12 和 M13, 电阻 R_B 满足关系式:

$$V_{GS12} + I_{DS12} \cdot R_B = V_{GS13}$$

又有 $V_{eff} = V_{GS} - V_{th}$, 假定 $V_{th12} \approx V_{th13}$

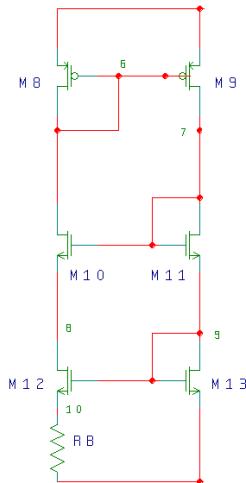


图 12、偏置电路

得到

$$V_{eff12} + I_{DS12} \cdot R_B = V_{eff13}$$

$$\sqrt{\frac{2I_{DS12}}{\mu_n C_{ox}(\frac{W}{L})_{12}}} + I_{DS12} \cdot R_B = \sqrt{\frac{2I_{DS13}}{\mu_n C_{ox}(\frac{W}{L})_{13}}}$$

$$\because I_{DS12} = I_{DS8} = I_{DS9} = I_{DS13}$$

$$\therefore \sqrt{\frac{2I_{DS13}}{\mu_n C_{ox}(\frac{W}{L})_{12}}} + I_{DS13} \cdot R_B = \sqrt{\frac{2I_{DS13}}{\mu_n C_{ox}(\frac{W}{L})_{13}}}$$

$$g_{m13} = \sqrt{2\mu_n C_{ox}(\frac{W}{L})_{13} I_{DS13}} = \frac{2[1 - \sqrt{(\frac{W}{L})_{13}/(\frac{W}{L})_{12}}]}{R_B}$$

可以看出管子 M13 的跨导只与 M13 和 M12 的尺寸比，和电阻 R_B 有关系，与工艺及温度无关。一般情况下，取 $(\frac{W}{L})_{12} = 4(\frac{W}{L})_{13}$ ，则 $g_{m13} = \frac{1}{R_B}$ 。

10. 偏置条件

vi1,vi2 输入端的共模输入电压为 V_{cm} 。共模输入动态范围 $V_{cm,min} \leq V_{cm} \leq V_{cm,max}$ 。同样输出动态范围 $V_{out,min} \leq V_{out} \leq V_{out,max}$ 。偏置条件要求在上述的共模输入动态范围和输出动态范围之内，每一个 MOS 管（除了 M14）必须工作在饱和区。

● 管子 M1

M1 在饱和区的条件是 $V_{DS1} \leq V_{GS1} - V_{TP}$ ，即 $V_{D1} \leq V_{G1} - V_{TP}$ 。而 M3 的栅电压与漏电压相等，等于 V_{D1} 。

$$V_{D1} = V_{G4} = V_{G3} = \sqrt{\frac{2I_{DS1}}{\mu_n C_{ox}(\frac{W}{L})_3}} + V_{TN} + V_{SS}$$

因此，M1 饱和的条件是

$$\sqrt{\frac{2I_{DS1}}{\mu_n C_{ox}(\frac{W}{L})_3}} \leq V_{cm,min} - V_{TP} - V_{TN} - V_{SS}$$

其中 $V_{cm,min}$ 是使得 M1 保持在饱和区的最小共模输入电压。

● 管子 M2

系统失调电压要求 M1 和 M2 的漏极电压相等，因此 M2 饱和的要求与 M1 相同。

● 管子 M3

管子 M3 连接成二极管， $V_{gd3}=0$ ，因此 M3 始终是处在饱和区。

- 管子 M4

系统失调电压要求 M3 和 M4 的漏极电压相等，因此 M4 饱和的要求与 M3 相同，也始终是处在饱和区。

- 管子 M5

M5 在饱和区的条件是 $V_{DS5} \leq V_{GS5} - V_{TP}$ ，即 $V_{D5} \leq V_{G5} - V_{TP}$ 。而 M5 的漏电压与 M1 和 M2 的源电压相等，等于 V_{S1} 。

$$V_{D5} = V_{S2} = V_{S1} = V_{cm} - V_{TP} + \sqrt{\frac{2I_{DS1}}{\mu_p C_{ox}(\frac{W}{L})_1}}$$

M5 的栅极电压 $V_{G5} = V_{DD} + V_{TP} - \sqrt{\frac{2I_{DS5}}{\mu_p C_{ox}(\frac{W}{L})_5}}$

因此，M5 饱和的条件是

$$\sqrt{\frac{2I_{DS1}}{\mu_p C_{ox}(\frac{W}{L})_1}} + \sqrt{\frac{2I_{DS5}}{\mu_p C_{ox}(\frac{W}{L})_5}} \leq V_{DD} - V_{cm,max} + V_{TP}$$

其中 $V_{cm,max}$ 是使得 M5 保持在饱和区的最大共模输入电压。

- 管子 M6

M6 在饱和区的条件是 $V_{DS6} \geq V_{GS6} - V_{TN}$ ，即 $V_{D6} \geq V_{G6} - V_{TN}$ 。而 M6 的栅极电压取决于 M6 的宽长比和其漏源电流，

$$V_{G6} = \sqrt{\frac{2I_{DS6}}{\mu_n C_{ox}(\frac{W}{L})_6}} + V_{TN} + V_{SS}$$

输出的最小电压 $V_{out,min}$ 是使得 M6 保持在饱和区的最小电压。

因此，M6 饱和的条件是

$$\sqrt{\frac{2I_{DS6}}{\mu_n C_{ox}(\frac{W}{L})_6}} \leq V_{out,min} - V_{SS}$$

- 管子 M7

M7 在饱和区的条件是 $V_{DS7} \leq V_{GS7} - V_{TP}$ ，即 $V_{D7} \leq V_{G7} - V_{TP}$ 。而 M7 的栅极电压取决于 M7 的宽长比和其漏源电流，

$$V_{G7} = -\sqrt{\frac{2I_{DS7}}{\mu_p C_{ox}(\frac{W}{L})_7}} + V_{TP} + V_{DD}$$

输出的最小电压 $V_{out,min}$ 是使得 M7 保持在饱和区的最小电压。

因此，M7 饱和的条件是

$$\sqrt{\frac{2I_{DS7}}{\mu_p C_{ox} \left(\frac{W}{L}\right)_7}} \leq V_{DD} - V_{out,max}$$

- 管子 M8

管子 M8 连接成二极管， $V_{gd8}=0$ ，因此 M8 始终是处在饱和区。

- 管子 M9

M9 在饱和区的条件是 $V_{DS9} \leq V_{GS9} - V_{TP}$ ，即 $V_{D9} \leq V_{G9} - V_{TP}$ 。电源镜要求 M8 和 M9 的电流相等，因此 M4 饱和的要求与 M3 相同，也始终是处在饱和区。

- 管子 M11

管子 M11 连接成二极管， $V_{gd11}=0$ ，因此 M11 始终是处在饱和区。

- 管子 M13

管子 M13 连接成二极管， $V_{gd13}=0$ ，因此 M13 始终是处在饱和区。

- 所有管子的 V_{eff} 必须大于一个最低有效电压 $V_{overdrive,min}$ 。这样确保 MOS 管远离亚阈值区，提高管子之间的匹配性。

$$V_{GS} - V_T = \sqrt{\frac{2I_{DS}}{\mu C_{ox} \left(\frac{W}{L}\right)}} \geq V_{overdrive,min}$$

11. 共模抑制比 (CMRR)

参考[3] 154–156 页，共模抑制比表示为，

$$CMRR = (1 + 2g_{m1}r_{ds5})g_{m3}(r_{ds1} // r_{ds3}) \approx 2g_{m1}r_{ds5}g_{m3}(r_{ds1} // r_{ds3})$$

$$= \frac{2g_{m1}g_{m3}}{(g_{ds1} + g_{ds3})g_{ds5}} = \frac{4C_{ox}}{(\lambda_n + \lambda_p)\lambda_p} \sqrt{\frac{\mu_n\mu_p \left(\frac{W}{L}\right)_1 \left(\frac{W}{L}\right)_3}{I_{DS5}^2}}$$

12. 电源抑制比 (PSRR)

- 负电源抑制比

负电源抑制比表示为

$$nPSRR = \frac{g_{m1}g_{m6}}{(g_{ds2} + g_{ds4})g_{ds6}} \cdot \frac{1}{(1+s/\omega_{p1})(1+s/\omega_{p2})}$$

低频段，负电源抑制比

$$nPSRR(0) = \frac{g_{m1}g_{m6}}{(g_{ds2} + g_{ds4})g_{ds6}} = \frac{C_{ox}}{(\lambda_n + \lambda_p)\lambda_n} \sqrt{\frac{\mu_n\mu_p \left(\frac{W}{L}\right)_1 \left(\frac{W}{L}\right)_6}{I_{DS1}I_{DS6}}}$$

高频段，单位增益带宽频率点负电源抑制比

$$|nPSRR| = \frac{nPSRR(0)^2}{(1 + \frac{\omega_u^2}{\omega_{p1}^2})(1 + \frac{\omega_u^2}{\omega_{p2}^2})} \geq a$$

- 正电源抑制比

低频段，正电源抑制比为

$$pPSRR = \frac{2g_{m1}g_{m3}g_{m6}}{(g_{ds2} + g_{ds4})(2g_{m3}g_{ds7} - g_{m6}g_{ds5})}$$

13. 管子尺寸限制

根据工艺和版图设计规则的要求，所有 MOS 管的宽度和长度必须满足：

$$L_{\min} \leq L_i \leq L_{\max}, \quad W_{\min} \leq W_i \leq W_{\max} \quad i = 1, \dots, 14.$$

14. 面积限制

整个运算放大器芯片面积 A 可以近似表示为所有管子面积和电容面积之和：

$$A = \alpha_0 + \alpha_1 C_C + \alpha_2 \sum_{i=1}^{14} W_i L_i$$

α_0 表示一个固定面积； α_1 表示为单位电容的面积大小； α_2 表示为一个比例系数，它是考虑到漏源区和连线的面积。

四、设计优化

为了处理方便，同时又不影响最终结果，我们将偏置电路简化为一个电流源。简化后的 CMOS 两级运算放大器如图 13 所示。

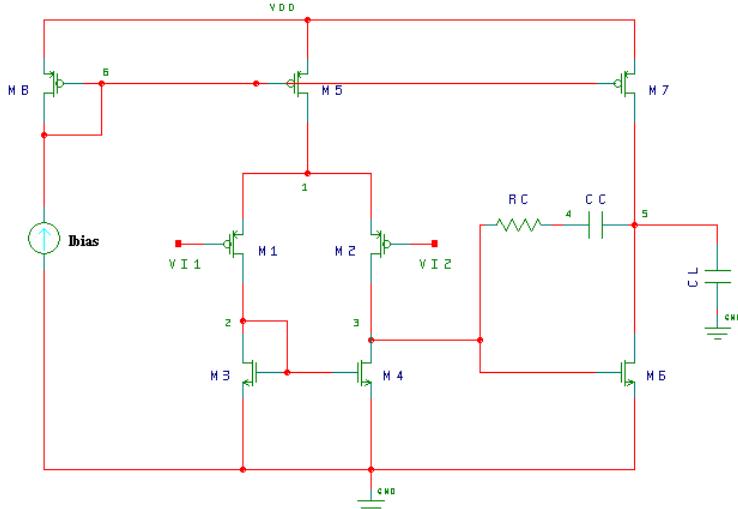


图 13、简化的 CMOS 两级运算放大器

上述简化的 CMOS 两级运算放大器有 19 个设计参数：

- 所有管子的宽长， $W_i, L_i, i=1\dots8$;
- 电阻 R_C 和补偿电容 C_C
- 偏置电流 $Ibias$

1. CMOS 两级运算放大器设计指标

- 管子长度 $\geq L_{min}$
- 管子宽度 $\geq W_{min}$
- 面积 $\leq A_{max}$
- 负载电容 $= C_L$
- 共模输入电压 固定在 $(VDD + VSS) / 2$
- 输出动态范围 $[0.1(VDD - VSS), 0.9(VDD - VSS)]$
- 静态功耗 $\leq P_{max}$
- 开环直流增益 $\geq Av_{min}$
- 单位增益带宽 $\geq f_{min}$
- 相位裕量 $\geq PM_{min}$
- 转换速率 $\geq SR_{min}$
- 共模抑制比 $\geq CMRR_{min}$
- 电源抑制比 $\geq PSRR_{min}$
- 等效输入噪声 $\leq S_{max} @1KHz$

2. 设计优化问题

上述设计指标中的任何一个指标都可以作为目标函数。考虑到在通常情况下，任何一个设计我们都希望芯片面积越小越好。不失一般性，我们将芯片面积作为优化的目标函数，其他所有指标作为约束条件。

- 目标函数

面积目标函数 $A = \alpha_0 + \alpha_1 C_C + \alpha_2 \sum_{i=1}^{14} W_i L_i$

- 约束不等式

(1)、增益不等式：

$$A_v(0) = \frac{g_{m1}g_{m6}}{(g_{o2}+g_{o4})(g_{o6}+g_{o7})} = \frac{2C_{ox}}{(\lambda_n + \lambda_p)^2} \sqrt{\mu_n \mu_p \frac{W_1 W_6}{L_1 L_6 I_{DS1} I_{DS6}}} \geq A_{V\min}$$

$$(2)、单位增益带宽 \quad \omega_u = \frac{g_{m1}}{C_C} = \frac{\sqrt{2\mu_p C_{ox} \frac{W_1}{L_1} I_{DS1}}}{C_C} \geq A_{V\min}$$

$$(3)、转换速率不等式: SR_{\min} \leq \frac{2I_{DS1}}{C_C}, SR_{\min} \leq \frac{I_{DS7}}{C_C + C_L},$$

$$(4)、静态功耗不等式: (V_{dd} - V_{ss})(I_{DS8} + I_{DS5} + I_{DS7}) \leq P_{static,\max}$$

$$(5)、等效输入噪声密度谱不等式: S_{n,in}^2 = \frac{\alpha}{f} + \beta \leq S_{\max}^2$$

$$\text{其中 } \alpha = \frac{2K_{fp}}{C_{ox} W_1 L_1} \left(1 + \frac{K_{fn} \mu_n L_1^2}{K_{fp} \mu_p L_3^2} \right), \quad \beta = \frac{16KT}{3 \sqrt{2\mu_p C_{ox} \frac{W_1}{L_1} I_{DS1}}} \left(1 + \sqrt{\frac{\mu_n \frac{W_3}{L_3}}{\mu_p \frac{W_1}{L_1}}} \right)$$

(6)、相位不等式：

$$PM = 180^\circ - \arctan \frac{\omega_u}{\omega_{p_1}} - \arctan \frac{\omega_u}{\omega_{p_2}} - \arctan \frac{\omega_u}{\omega_{p_3}} - \arctan \frac{\omega_u}{\omega_{p_4}} + \arctan \frac{\omega_u}{\omega_z} \geq PM_{\min}$$

$$PM = 180^\circ - 90^\circ - \arctan \left(\frac{\omega_u}{\omega_{p_2}} \right) - \arctan \left(\frac{\omega_u}{\omega_{p_3}} \right) - \arctan \left(\frac{\omega_u}{\omega_{p_4}} \right) + \arctan \left(\frac{\omega_u}{\omega_z} \right) \geq PM_{\min}$$

为了便于处理，我们暂时只考虑消除零点（无穷远处）情况， $\omega_z = \infty$ ，并且采用

$\arctan(x) \approx x, (x \leq 25^\circ)$ 近似得，

$$\frac{90^\circ - PM_{\min}}{360^\circ} \times 2\pi \geq \left(\frac{\omega_u}{\omega_{p_2}} \right) + \left(\frac{\omega_u}{\omega_{p_3}} \right) + \left(\frac{\omega_u}{\omega_{p_4}} \right)$$

$$\text{主极点等式: } \omega_{p_1} = \frac{\omega_u}{A_v(0)} = \frac{g_{m1}}{A_v(0)C_C} = \frac{(\lambda_n + \lambda_p)^2}{C_C \sqrt{2\mu_n C_{ox}}} \cdot \sqrt{\frac{L_6 I_{DS6} I_{DS1}^2}{W_6}}$$

$$\text{第二极点等式: } \omega_{p_2} = \frac{g_{m6} C_C}{C_1 C_C + C_1 C_{TL} + C_C C_{TL}}$$

其中 C_1 是 M6 棚极上的所有电容

$$C_1 = C_{gs6} + C_{db2} + C_{db4} + C_{gd2} + C_{gd4}$$

$$= \frac{2}{3} W_6 L_6 C_{ox} + W_6 L_D C_{ox} + \frac{C_j L_d W_2 + C_{jdw}(2L_d + W_2)}{(1 + \frac{V_{DD} - V_{TN} - \Delta V}{2\varphi_o})^{\frac{1}{2}}} + \frac{C_j L_d W_4 + C_{jdw}(2L_d + W_4)}{(1 + \frac{V_{TN} + \Delta V}{2\varphi_o})^{\frac{1}{2}}} + C_{ox} W_2 L_D + C_{ox} W_4 L_D$$

C_{TL} 是输出端上的所有电容

$$C_{TL} = C_L + C_{db6} + C_{db7} + C_{gd6} + C_{gd7}$$

$$= C_L + \frac{C_j L_d W_6 + C_{jdw}(2L_d + W_6)}{(1 + \frac{V_{DD} - V_{SS}}{2\varphi_o})^{\frac{1}{2}}} + \frac{C_j L_d W_7 + C_{jdw}(2L_d + W_7)}{(1 + \frac{V_{DD} - V_{SS}}{2\varphi_o})^{\frac{1}{2}}} + C_{ox} W_6 L_D + C_{ox} W_7 L_D$$

$$\frac{\omega_u}{\omega_{p_2}} = \frac{\frac{g_{m1}}{C_C}}{\frac{g_{m6} C_C}{C_1 C_C + C_1 C_{TL} + C_C C_{TL}}} = \frac{g_{m1}}{g_{m6}} \cdot \frac{C_C(C_1 + C_{TL}) + C_1 C_{TL}}{C_C^2}$$

$$\text{第三极点等式: } \omega_{p_3} = \frac{g_{m3}}{C_2}$$

其中 C_2 是 M3 棚极上的所有电容

$$C_2 = C_{gs3} + C_{gs4} + C_{db1} + C_{db3} + C_{gd1}$$

$$= \frac{2}{3} W_3 L_3 C_{ox} + W_3 L_D C_{ox} + \frac{2}{3} W_4 L_4 C_{ox} + W_4 L_D C_{ox} + \frac{C_j L_d W_1 + C_{jdw}(2L_d + W_1)}{(1 + \frac{V_{DD} - V_{TN} - \Delta V}{2\varphi_o})^{\frac{1}{2}}} + \frac{C_j L_d W_3 + C_{jdw}(2L_d + W_3)}{(1 + \frac{V_{TN} + \Delta V}{2\varphi_o})^{\frac{1}{2}}} + C_{ox} W_1 L_D$$

$$\frac{\omega_u}{\omega_{p_3}} = \frac{\frac{g_{m1}}{C_C}}{\frac{g_{m3}}{C_2}} = \frac{g_{m1}}{g_{m3}} \cdot \frac{C_2}{C_C}$$

$$\text{第四极点等式: } \omega_{p_4} = \frac{1}{R_C C_1} = \frac{\sqrt{2\mu_n C_{ox}}}{C_1} \sqrt{I_{DS6} \frac{W_{13}}{L_{13}} \frac{L_{11}}{W_{11}} \frac{W_{14}^2}{L_{14}^2} \frac{L_6}{W_6}}$$

$$\text{零点等式: } \omega_z = \frac{1}{C_C \left(\frac{1}{g_{m6}} - R_C \right)} = \frac{g_{m6}}{C_C \left(1 - \frac{\left(\frac{W}{L}\right)_6}{\left(\frac{W}{L}\right)_{14}} \sqrt{\frac{\left(\frac{W}{L}\right)_{11}}{\left(\frac{W}{L}\right)_{13}}} \right)} = \frac{\sqrt{2\mu_n C_{ox} \left(\frac{W}{L}\right)_6 I_{DS6}}}{C_C \left(1 - \frac{\left(\frac{W}{L}\right)_6}{\left(\frac{W}{L}\right)_{14}} \sqrt{\frac{\left(\frac{W}{L}\right)_{11}}{\left(\frac{W}{L}\right)_{13}}} \right)}$$

$$\text{其中 } R_C g_{m6} = \frac{\left(\frac{W}{L}\right)_6}{\left(\frac{W}{L}\right)_{14}} \sqrt{\frac{\left(\frac{W}{L}\right)_{11}}{\left(\frac{W}{L}\right)_{13}}}$$

(7) 、 MOS 管偏置条件不等式:

$$\sqrt{\frac{2I_{DS1}}{\mu_n C_{ox} \left(\frac{W}{L}\right)_3}} \leq V_{cm,\min} - V_{TP} - V_{TN} - V_{SS},$$

$$\sqrt{\frac{2I_{DS1}}{\mu_p C_{ox} \left(\frac{W}{L}\right)_1}} + \sqrt{\frac{2I_{DS5}}{\mu_p C_{ox} \left(\frac{W}{L}\right)_5}} \leq V_{DD} - V_{cm,\max} + V_{TP}$$

$$\sqrt{\frac{2I_{DS6}}{\mu_n C_{ox} \left(\frac{W}{L}\right)_6}} \leq V_{out,\min} - V_{SS}$$

$$\sqrt{\frac{2I_{DS7}}{\mu_p C_{ox} \left(\frac{W}{L}\right)_7}} \leq V_{DD} - V_{out,\max}$$

$$V_{GS} - V_T = \sqrt{\frac{2I_{DSi}}{\mu C_{ox} \frac{W_i}{L_i}}} \geq V_{overdrive,\min}, \quad i = 1, \dots, 8.$$

(8) 、 共模抑制比不等式:

$$CMRR = \frac{2g_{m1}g_{m3}}{(g_{o1} + g_{o3})g_{ds5}} = \frac{2C_{ox}}{(\lambda_n + \lambda_p)\lambda_p} \sqrt{\frac{\mu_n \mu_p \left(\frac{W}{L}\right)_1 \left(\frac{W}{L}\right)_3}{I_{DS5}^2}} \geq CMRR_{\min}$$

(9) 、 负电源抑制比:

$$nPSRR(0) = \frac{g_{m1}g_{m6}}{(g_{ds2} + g_{ds4})g_{ds6}} = \frac{C_{ox}}{(\lambda_n + \lambda_p)\lambda_n} \sqrt{\frac{\mu_n \mu_p \left(\frac{W}{L}\right)_1 \left(\frac{W}{L}\right)_6}{I_{DS1} I_{DS6}}} \geq nPSRR \min$$

(10)、正电源抑制比：

$$pPSRR = \frac{2g_{m1}g_{m3}g_{m6}}{(g_{ds2} + g_{ds4})(2g_{m3}g_{ds7} - g_{m6}g_{ds5})} \geq pPSRR_{\min}$$

(11)、管子尺寸限制不等式：

$$L_{\min} \leq L_i \leq L_{\max}, \quad W_{\min} \leq W_i \leq W_{\max} \quad i = 1, \dots, 8.$$

- 约束等式

(1)、失调匹配： $L_1 = L_2, \quad W_1 = W_2, \quad L_3 = L_4 = L_6, \quad W_3 = W_4 = (\frac{I_{DS5}}{2 \times I_{DS7}}) \times W_6$

(2)、电流镜等式： $L_5 = L_7 = L_8, \quad \frac{I_{DS5}}{I_{DS8}} = \frac{W_5/L_5}{W_8/L_8}, \quad \frac{I_{DS7}}{I_{DS8}} = \frac{W_7/L_7}{W_8/L_8}$

(3)、电路结构隐含等式： $0.5I_{DS5} = I_{DS1} = I_{DS2} = I_{DS3} = I_{DS4}, \quad I_{DS6} = I_{DS7}$,

上述的目标函数、约束不等式、约束等式的格式不符合 MOSEK[9]优化程序的格式，详细的格式见附录三。

3. MOSEK 程序优化和 SPICE 仿真结果

CMOS 两级运算放大器的两个设计实例如表格 1。实例一为针对面积目标函数的最小优化；实例二为针对单位增益带宽目标函数的最大优化。在 Windows2000 环境下，采用 MOSEK[9]程序求解这两个优化问题，优化时间都不到 1 秒。MOSEK 程序优化得到的结果如表格 2 所示。所得的管子尺寸采用 CMOS 0.8μm LEVEL1 模型，在 HSPICE 软件下进行仿真，性能结果如表格 3 所示。

表格一、CMOS 两级运算放大器的设计实例

设计指标	设计实例一(面积优化)	设计实例二(带宽优化)
管子长度	$\geq 0.8 \mu\text{m}$	$\geq 0.8 \mu\text{m}$
管子宽度	$\geq 2 \mu\text{m}$	$\geq 0.2 \mu\text{m}$
面积	Minimize	$\leq 20000 \mu\text{m}^2$
负载电容	$= 3 \text{ pF}$	$= 3 \text{ pF}$
共模输入电压	固定在 $(VDD + VSS)/2$	固定在 $(VDD + VSS)/2$
输出动态范围	$[0.1(VDD-VSS), 0.9(VDD-VSS)]$	$[0.1(VDD-VSS), 0.9(VDD-VSS)]$
静态功耗	$\leq 2\text{mW}$	$\leq 2\text{mW}$
开环直流增益	$\geq 80 \text{ dB}$	$\geq 80 \text{ dB}$
单位增益带宽	$\geq 40\text{MHz}$	Maximize
相位裕量	$\geq 60 \text{ degree}$	$\geq 60 \text{ degree}$
转换速率	$\geq 30 \text{ V/us}$	$\geq 30 \text{ V/us}$
共模抑制比	$\geq 60\text{dB}$	$\geq 60\text{dB}$
负电源抑制比	$\geq 80\text{dB}$	$\geq 80\text{dB}$
等效输入噪声	$\leq 300 \text{ nV}/\sqrt{\text{HZ}} @1\text{KHz}$	$\leq 300 \text{ nV}/\sqrt{\text{HZ}} @1\text{KHz}$

表格二、CMOS 两级运算放大器优化结果

参数	实例一	实例二	参数（有效值）	实例一	实例二
$W_1=W_2$	148.67 μm	184.35 μm	$L_1=L_2$	0.8 μm	0.80 μm
$W_3=W_4$	54.80 μm	77.32 μm	$L_3=L_4$	1.13 μm	0.90 μm
W_5	24.62 μm	41.97 μm	L_5	0.8 μm	1.10 μm
W_6	211.80 μm	250.47 μm	L_6	1.13 μm	0.90 μm
W_7	47.58 μm	67.98 μm	L_7	0.8 μm	1.10 μm
$W_8=W_9$	2.0 μm	2.00 μm	$L_8=L_9$	0.8 μm	1.10 μm
$W_{10}=W_{11}$	6.91 μm	6.54 μm	$L_{10}=L_{11}$	0.8 μm	0.8 μm
W_{12}	27.64 μm	26.15 μm	L_{12}	0.8 μm	0.8 μm
W_{13}	6.91 μm	6.54 μm	L_{13}	0.8 μm	0.8 μm
W_{14}	164.37 μm	222.18 μm	L_{14}	0.8 μm	0.8 μm
R_B	6.7k	8.4k	C_C	3.524 pf	3.937 pf

表格三、CMOS 两级运算放大器的 HSPICE 仿真结果

设计指标	实例一（面积优化）				实例二（带宽优化）			
	要求	MOSEK	敏感度	HSPICE	要求	MOSEK	敏感度	HSPICE
面积	Minimize	8799	-----	8799	$20000 \mu\text{m}^2$	10477	0	10477
静态功耗	$\leq 2 \text{mW}$	2	-1.773	2.07	$\leq 2 \text{mW}$	2	-1.000	2.09
开环直流增益	$\geq 80 \text{ dB}$	86.9	0	89.9	$\geq 80 \text{ dB}$	88.8	0	91.7
单位增益带宽	Maximize	40	-0.923	36.4	Maximize	42.3	-----	39.3
相位裕量	$\geq 60 \text{ degree}$	60	-2.708	59	$\geq 60 \text{ degree}$	60	-1.206	61
转换速率	$\geq 30 \text{ V/us}$	30	-0.923	34.6	$\geq 30 \text{ V/us}$	30	-0.383	35.8
共模抑制比	$\geq 60 \text{dB}$	90.4	0	94.5	$\geq 60 \text{dB}$	92.4	0	96.3
负电源抑制比	$\geq 80 \text{dB}$	96.4	0	99.3	$\geq 80 \text{dB}$	98.4	0	101
等效输入噪声	$\leq 300 \text{nV}/\sqrt{\text{Hz}}$	300	-1.376	283	$\leq 300 \text{nV}/\sqrt{\text{Hz}}$	300	-0.422	282

实例一的结果是针对面积最小的一个全局最优解；实例二的结果是针对单位增益带宽最大的一个全局最优解。两个实例的 HSPICE 仿真结果与 MOSEK 优化结果非常接近，并且两者都满足了设计的指标要求。

4. 敏感度分析

在论文的第二部分，我们已经给出了敏感度的理论分析。这里，我们解释一下在实际应用中敏感度的实际意义和作用。

在实例二（单位增益带宽优化）中，静态功耗、相位裕量、转换速率和等效输入噪声四个主要约束的敏感度为非零。这说明这四个约束条件的加强或者放松对于目标函数—单位增益带宽的影响是显著的。例如，实例二中的静态功耗的敏感度是-1.000，如果静态功耗增加1%，则单位增益带宽增加1%；等效输入噪声的敏感度是-0.422，如果等效输入噪声增加1%，则单位增益带宽增加0.422%。

敏感度表明了该约束对于目标函数的影响程度。敏感度为零的约束表明该约束的加强和放松对目标函数无影响。根据敏感度的大小可以将约束条件按照重要性进行排列。实例一按照对芯片面积的重要性的排列是：相位裕度（-2.708），静态功耗（-1.773），等效输入噪声（-1.376），单位增益带宽（-0.923），转换速率（-0.923）。实例二按照对单位增益带宽的重要性的排列是：相位裕度（-1.206），静态功耗（-1.000），等效输入噪声（-0.422），转换速率（-0.383）。

五、结论

本文论述了一种采用数学最优化方法—几何规划（Geometric Programming）进行两级运算放大器的管子尺寸参数优化的方法。

首先，我们根据运算放大器设计要求（单位增益带宽、相位裕量、输入等效噪声、面积、功耗等），通过 CMOS 运算放大器设计一般步骤得到所有设计约束条件不等式和目标函数。然后，将所有约束不等式和目标函数转换成一个几何规划问题。最后，采用数学优化求解方法—内点法求得一个全局最优解或者无解的结果。全局最优解通过 HSPICE 进行仿真验证，MOSEK 优化与 HSPICE 仿真比较结果表明该几何优化方法对于求解 CMOS 运算放大器设计非常有效。

几何规划（Geometric Programming）优化设计方法不只适合于两级运算放大器的设计，它同样对于任何满足几何规划条件的问题都适合，比如 Cascode 运算放大器、LC 振荡器、 $\Sigma\Delta$ 调制器、滤波器设计等等工程优化问题。采用该优化方法的关键在于如何将一个工程的优化问题转换成一个几何规划问题，特别是如何将一些非多项式不等式转换（或者近似）成多项式不等式。

附一、相位裕量和幅频响应基本知识：

下面我们介绍如何推导出相位裕量和幅频响应的三角函数。

例如：传递函数 $A(s) = \frac{1}{1 + \frac{s}{p}}$

首先，用 $j\omega$ 代替 s ，

$$A(j\omega) = \frac{1}{1 + \frac{j\omega}{p}} = \frac{1}{1 + \frac{j\omega}{p}} \cdot \frac{1 - \frac{j\omega}{p}}{1 - \frac{j\omega}{p}} = \frac{1 - \frac{j\omega}{p}}{1 + \frac{\omega^2}{p^2}}$$

所以，幅频响应函数 $|A(j\omega)| = \sqrt{\frac{1 + \frac{\omega^2}{p^2}}{1 + \frac{\omega^2}{p^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{p^2}}}$

相频响应函数 $\angle A(j\omega) = \arctan \frac{\omega}{p}$

附二、MOSFET 模型

这里，我们简单描述一下在几何优化问题中涉及到得 MOSFET 的大信号和小信号模型。我们将 LEVEL ONE 模型进行一些近似，使其适合于几何优化问题。

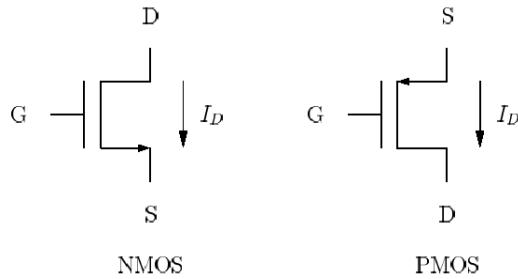


图 14、MOS 管符号

- 大信号模型

在 CMOS 模拟电路中，绝大多数情况下 MOS 管是工作在饱和区。

对于 NMOS 管工作在饱和区的条件是

$$V_{DS} \geq V_{GS} - V_{TN}$$

当 NMOS 处在饱和区时，其漏源电流 I_{DS} 为：

$$I_{DS} = \frac{1}{2} \mu_n C_{ox} \frac{W}{L} (V_{GS} - V_{TN})^2 (1 + \lambda_n V_{DS})$$

其中 L, W 分别是 NMOS 的长和宽， μ_n 是电子迁移率， C_{ox} 是单位面积上氧化层电容，

V_{TN} 为 NMOS 管阈值电压值， λ 沟道长度调制系数。

由于几何优化问题中多项式函数的要求，我们忽略沟道长度调整效应。漏源 I_{DS} 电流简化为：

$$I_{DS} = \frac{1}{2} \mu_n C_{ox} \frac{W}{L} (V_{GS} - V_{TN})^2$$

同样，对于 PMOS 管工作在饱和区的条件是

$$V_{DS} \leq V_{GS} - V_{TP}$$

当 PMOS 处在饱和区时，其漏源电流 I_{DS} 为：

$$I_{DS} = -\frac{1}{2} \mu_p C_{ox} \frac{W}{L} (V_{GS} - V_{TP})^2 (1 - \lambda_p V_{DS})$$

其中 L, W 分别是 PMOS 的长和宽， μ_p 是空穴迁移率， C_{ox} 是单位面积上氧化层电容，

V_{TP} 为 PMOS 管阈值电压值， λ_p 沟道长度调制系数。

由于几何优化问题中多项式函数的要求，我们忽略沟道长度调整效应。漏源 I_{DS} 电流简化为：

$$I_{DS} = -\frac{1}{2} \mu_p C_{ox} \frac{W}{L} (V_{GS} - V_{TP})^2$$

● 小信号模型

如图 15 所示，为工作在饱和区的 MOS 管的小信号模型。

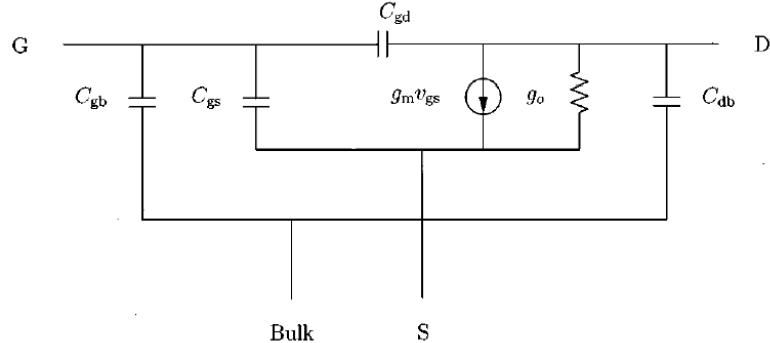


图 15、MOSFET 小信号模型

忽略沟道长度调制效应，跨导 g_m ，

$$g_m = \frac{\partial I_{DS}}{\partial V_{GS}} = \sqrt{2\mu_0 C_{ox} \frac{W}{L}}$$

输出导纳 g_o ，

$$g_o = \frac{\partial I_{DS}}{\partial V_{DS}} = \lambda I_{DS}$$

栅极电容是栅氧化层电容与交迭电容之和：

$$C_{gs} = \frac{2}{3} W L C_{ox} + W L_D C_{ox}$$

其中 L_D 是横行扩散长度。

源到衬底的结电容：

$$C_{sb} = \frac{C_{sb0}}{\left(1 + \frac{V_{SB}}{\varphi_0}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

其中 $C_{sb0} = C_j L_s W + C_{jsw} (2L_s + W)$ ， φ_0 为结内建势， L_s 源扩散长度。

漏到衬底的结电容：

$$C_{db} = \frac{C_{db0}}{\left(1 + \frac{V_{DB}}{\varphi_0}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

其中 $C_{db0} = C_j L_d W + C_{jdw} (2L_d + W) = C_{sb0}$ ， φ_0 为结内建势， $L_d = L_s$ 漏扩散长度。

栅到漏底交迭电容：

$$C_{gd} = C_{ox}WL_D$$

因为 V_{SB} , V_{DB} 是一个与设计变量相独立的，因此 C_{sb} , C_{db} 不是一个多项式。

在我们设计的运算放大器中，有关系的管子共有六个，分别是 M1, M2, M3, M4, M6, M7。它们的 $V_{SB}=0$ ，因此 $C_{sb} = C_{sb0}$ 是一个多项式。而 V_{DB} 的值必须给定一个估计值。M1, M2, M3, M4 四个 MOS 管的漏极电压是 $V_{G6} = V_{TN} + V_{ss} + \Delta V_o$, ($\Delta V \approx 200mV$), M6, M7 的漏极电压是运算放大器的输出电压，静态输出电压是电源电压的中间值 $\frac{1}{2}(V_{dd} - V_{ss})$ 。所以它们的漏—衬底电容分别是：

$$\begin{aligned} C_{db1} = C_{db2} &= \frac{C_{db0,1}}{\left(1 + \frac{V_{DD} - V_{TN} - \Delta V - V_{ss}}{2\varphi_o}\right)^{\frac{1}{2}}} & C_{db3} = C_{db4} &= \frac{C_{db0,3}}{\left(1 + \frac{V_{TN} + \Delta V}{2\varphi_o}\right)^{\frac{1}{2}}} \\ C_{db6} &= \frac{C_{db0,6}}{\left(1 + \frac{V_{DD} - V_{ss}}{2\varphi_o}\right)^{\frac{1}{2}}} & C_{db7} &= \frac{C_{db0,7}}{\left(1 + \frac{V_{DD} - V_{ss}}{2\varphi_o}\right)^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

附三、MOSEK 格式的几何优化

1、 变量定义：

$$W_1, W_3, W_5, W_7, W_8, L_1, L_3, L_5, L_7, L_8, I_{DS8}, C_C$$

2、 目标函数

$$(0) \quad \text{Minimize} \quad \alpha_0 + \alpha_1 C_C + \alpha_2 (2W_1 L_1 + 2W_3 L_3 + W_5 L_5 + 2W_3 W_5^{-1} W_7 L_3 L_5 L_7^{-1} + W_7 L_7 + W_8 L_8)$$

3、 约束不等式

subject to

$$\text{增益约束: } (1) \quad \frac{10^{\frac{A_{V_{\min}}}{20}} \cdot (\lambda_n + \lambda_p)^2}{4C_{ox}\sqrt{\mu_n\mu_p}} W_1^{-0.5} W_3^{-0.5} W_5 W_8^{-1} L_1^{0.5} L_3^{0.5} L_5^{-1} L_8 I_{DS8} \leq 1$$

$$\text{单位增益带宽约束 } (2) \quad \frac{2\pi f_{\min}}{\sqrt{\mu_p C_{ox}}} W_1^{-0.5} W_5^{-0.5} W_8^{0.5} L_1^{0.5} L_5^{0.5} L_8^{-0.5} I_{DS8} C_C \leq 1$$

$$\text{相位裕量约束 } (3) \quad SR_{\min} \leq \frac{2I_{DS1}}{C_C + C_1}, \quad C_1 = C_{gs6} + C_{db2} + C_{db4} + C_{gd2} + C_{gd4}$$

$$\begin{aligned} & SR_{\min} W_5^{-1} W_8 L_5 L_8^{-1} I_{DS8}^{-1} C_C + \frac{4}{3} C_{ox} SR_{\min} W_3 W_5^{-2} W_7 W_8 L_3 L_5^2 L_7^{-1} L_8^{-1} I_{DS8}^{-1} + 2L_D C_{ox} SR_{\min} W_3 W_5^{-2} W_7 W_8 L_5^2 L_7^{-1} L_8^{-1} I_{DS8}^{-1} \\ & + SR_{\min} \left(\frac{C_{jp} L_d + C_{jdw_p}}{(1 + \frac{V_{DD} - V_{TN} - \Delta V}{\varphi_o})^2} + C_{ox} L_D \right) W_1 W_5^{-1} W_8 L_5 L_8^{-1} I_{DS8}^{-1} + SR_{\min} \left(\frac{C_{jn} L_d + C_{jdw_n}}{(1 + \frac{V_{TN} + \Delta V}{\varphi_o})^2} + C_{ox} L_D \right) W_3 W_5^{-1} W_8 L_5 L_8^{-1} I_{DS8}^{-1} \\ & + SR_{\min} \left(\frac{2C_{jdw_p} L_d}{(1 + \frac{V_{DD} - V_{TN} - \Delta V}{\varphi_o})^2} + \frac{2C_{jdw_n} L_d}{(1 + \frac{V_{TN} + \Delta V}{\varphi_o})^2} \right) W_5^{-1} W_8 L_5 L_8^{-1} I_{DS8}^{-1} \leq 1 \end{aligned}$$

$$(4) \quad SR_{\min} \leq \frac{I_{DS7}}{C_C + C_{TL}}, \quad C_{TL} = C_L + C_{db6} + C_{db7} + C_{gd6} + C_{gd7}$$

$$\begin{aligned} & SR_{\min} W_7^{-1} W_8 L_7 L_8^{-1} I_{DS8}^{-1} C_C + SR_{\min} (C_L + \frac{2(C_{jdw_n} + C_{jdw_p}) L_d}{(1 + \frac{V_{DD} - V_{SS}}{2\varphi_o})^2}) W_7^{-1} W_8 L_7 L_8^{-1} I_{DS8}^{-1} + \\ & 2SR_{\min} \left(\frac{C_{jn} L_d + C_{jdw_n}}{(1 + \frac{V_{DD} - V_{SS}}{2\varphi_o})^2} + C_{ox} L_D \right) W_3 W_5^{-1} W_8 L_5 L_8^{-1} I_{DS8}^{-1} + SR_{\min} \left(\frac{C_{jp} L_d + C_{jdw_p}}{(1 + \frac{V_{DD} - V_{SS}}{2\varphi_o})^2} + C_{ox} L_D \right) W_8 L_7 L_8^{-1} I_{DS8}^{-1} \leq 1 \end{aligned}$$

$$\text{静态功耗约束 } (5) \quad \frac{(V_{dd} - V_{ss})}{P_{static,max}} (W_5 W_8^{-1} L_5^{-1} L_8 I_{DS8} + W_7 W_8^{-1} L_7^{-1} L_8 I_{DS8} + I_{DS8}) \leq 1$$

噪声约束 (6) $S_{n,in}^2 = \frac{\alpha}{f} + \beta \leq S_{\max}^2$

$$\begin{aligned} & \frac{2K_{fp}}{C_{ox}S_{\max}^2 f} W_1^{-1} L_1^{-1} + \frac{2K_{fn}\mu_n}{C_{ox}S_{\max}^2 f \mu_p} W_1^{-1} L_1 L_3^{-2} + \frac{16KT}{3S_{\max}^2 \sqrt{\mu_p C_{ox}}} W_1^{-0.5} W_5^{-0.5} W_8^{0.5} L_1^{0.5} L_5^{0.5} L_8^{-0.5} I_{DS8}^{-0.5} \\ & + \frac{16KT \sqrt{\mu_n}}{3S_{\max}^2 \sqrt{\mu_p^2 C_{ox}}} W_1^{-1} W_3^{0.5} W_5^{-0.5} W_8^{0.5} L_1 L_3^{-0.5} L_5^{0.5} L_8^{-0.5} I_{DS8}^{-0.5} \leq 1 \end{aligned}$$

共模抑制比约束 (7) $\frac{10^{\frac{nPSRR \min}{20}} \cdot (\lambda_n + \lambda_p) \lambda_p}{4C_{ox} \sqrt{\mu_n \mu_p}} W_1^{-0.5} W_3^{-0.5} W_5 W_8^{-1} L_1^{0.5} L_3^{0.5} L_5^{-1} L_8 I_{DS8} \leq 1$

负电源抑制比约束 (8) $\frac{10^{\frac{nPSRR \ min}{20}} (\lambda_n + \lambda_p) \lambda_n}{4C_{ox} \sqrt{\mu_n \mu_p}} W_1^{-0.5} W_3^{-0.5} W_5 W_8^{-1} L_1^{0.5} L_3^{0.5} L_5^{-1} L_8 I_{DS8} \leq 1$

共模输入最小值 (9) $\frac{1}{V_{cm,\min} - V_{TP} - V_{TN} - V_{SS}} \sqrt{\frac{1}{\mu_n C_{ox}}} \cdot W_3^{-0.5} W_5^{0.5} W_8^{-0.5} L_3^{0.5} L_5^{-0.5} L_8^{0.5} I_{DS8}^{0.5} \leq 1$

共模输入最大值 (10)

$$\frac{1}{V_{DD} - V_{cm,\max} + V_{TP}} \sqrt{\frac{1}{\mu_p C_{ox}}} \cdot W_1^{-0.5} W_5^{0.5} W_8^{-0.5} L_1^{0.5} L_5^{-0.5} L_8^{0.5} I_{DS8}^{0.5} + \frac{1}{V_{DD} - V_{cm,\max} + V_{TP}} \sqrt{\frac{2}{\mu_p C_{ox}}} \cdot W_8^{-0.5} L_8^{0.5} I_{DS8}^{0.5} \leq 1$$

输出最小值 (11) $\frac{1}{V_{out,\min} - V_{SS}} \sqrt{\frac{1}{\mu_n C_{ox}}} \cdot W_3^{-0.5} W_5^{0.5} W_8^{-0.5} L_3^{0.5} L_5^{-0.5} L_8^{0.5} I_{DS8}^{0.5} \leq 1$

输出最大值 (12) $\frac{1}{V_{DD} - V_{out,\max}} \sqrt{\frac{2}{\mu_p C_{ox}}} \cdot W_8^{-0.5} L_8^{0.5} I_{DS8}^{0.5} \leq 1$

有效栅源电压约束 (13) $V_{overdrive,\min} \sqrt{\mu_p C_{ox}} \cdot W_1^{0.5} W_5^{-0.5} W_8^{0.5} L_1^{-0.5} L_5^{0.5} L_8^{-0.5} I_{DS8}^{-0.5} \leq 1$

(14) $V_{overdrive,\min} \sqrt{\mu_n C_{ox}} \cdot W_3^{0.5} W_5^{-0.5} W_8^{0.5} L_3^{-0.5} L_5^{0.5} L_8^{-0.5} I_{DS8}^{-0.5} \leq 1$

(15) $V_{overdrive,\min} \sqrt{\frac{\mu_p C_{ox}}{2}} \cdot W_8^{0.5} L_8^{-0.5} I_{DS8}^{-0.5} \leq 1$

尺寸约束 (16–20) $W_{\min} W_i^{-1} \leq 1$

(21–25) $W_{\max}^{-1} W_i \leq 1$

(26–30) $L_{\min}^{-1} L_i^{-1} \leq 1$

(31–35) $L_{\max}^{-1} L_i \leq 1 \quad i=1,3,5,7,8 \quad (15–34)$

$$\text{相位裕量约束} \quad (36) \quad \frac{57.3}{90^\circ - PM_{\min}} \left[\left(\frac{\omega_u}{\omega_{p_2}} \right) + \left(\frac{\omega_u}{\omega_{p_3}} \right) + \left(\frac{\omega_u}{\omega_{p_4}} \right) \right] \leq 1$$

$$\begin{aligned} \text{第二极点 } \frac{\omega_u}{\omega_{p_2}} &= \frac{\frac{g_{m1}}{C_C}}{\frac{g_{m6} C_C}{C_1 C_C + C_1 C_{TL} + C_C C_{TL}}} = \frac{g_{m1}}{g_{m6}} \cdot \frac{C_C (C_1 + C_{TL}) + C_1 C_{TL}}{C_C^2} \\ &= \frac{g_{m1}}{g_{m6}} \cdot \frac{C_1 + C_{TL}}{C_C} + \frac{g_{m1}}{g_{m6}} \cdot \frac{C_1 C_{TL}}{C_C^2} \end{aligned}$$

$$\text{其中 } C_1 = C_{gs6} + C_{db2} + C_{db4} + C_{gd2} + C_{gd4}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{2}{3} W_6 L_6 C_{ox} + W_6 L_D C_{ox} + \frac{C_{jp} L_d W_2 + C_{jdw} (2L_d + W_2)}{\left(1 + \frac{V_{DD} - V_{TN} - \Delta V - V_{SS}}{2\varphi_o}\right)^2} + \frac{C_{jn} L_d W_4 + C_{jdw} (2L_d + W_4)}{\left(1 + \frac{V_{TN} + \Delta V}{2\varphi_o}\right)^2} + C_{ox} W_2 L_D + C_{ox} W_4 L_D \\ &= \frac{2}{3} W_6 L_6 C_{ox} + W_6 L_D C_{ox} + \left(\frac{C_{jp} L_d + C_{jdw}}{\left(1 + \frac{V_{DD} - V_{TN} - \Delta V - V_{SS}}{2\varphi_o}\right)^2} + C_{ox} L_D \right) W_2 + \left(\frac{C_{jn} L_d + C_{jdw}}{\left(1 + \frac{V_{TN} + \Delta V}{2\varphi_o}\right)^2} + C_{ox} L_D \right) W_4 + \frac{2C_{jdw} L_d}{\left(1 + \frac{V_{DD} - V_{TN} - \Delta V - V_{SS}}{2\varphi_o}\right)^2} + \frac{2C_{jdw} L_d}{\left(1 + \frac{V_{TN} + \Delta V}{2\varphi_o}\right)^2} \\ C_{TL} &= C_L + C_{db6} + C_{db7} + C_{gd6} + C_{gd7} \\ &= C_L + \frac{C_{jn} L_d W_6 + C_{jdw} (2L_d + W_6)}{\left(1 + \frac{V_{DD} - V_{SS}}{2\varphi_o}\right)^2} + \frac{C_{jp} L_d W_7 + C_{jdw} (2L_d + W_7)}{\left(1 + \frac{V_{DD} - V_{SS}}{2\varphi_o}\right)^2} + C_{ox} W_6 L_D + C_{ox} W_7 L_D \\ &= \left(C_L + \frac{2(C_{jdw} + C_{jdw}) L_d}{\left(1 + \frac{V_{DD} - V_{SS}}{2\varphi_o}\right)^2} \right) + \left(\frac{C_{jn} L_d + C_{jdw}}{\left(1 + \frac{V_{DD} - V_{SS}}{2\varphi_o}\right)^2} + C_{ox} L_D \right) W_6 + \left(\frac{C_{jp} L_d + C_{jdw}}{\left(1 + \frac{V_{DD} - V_{SS}}{2\varphi_o}\right)^2} + C_{ox} L_D \right) W_7 \end{aligned}$$

$\frac{g_{m1}}{g_{m6}} \cdot \frac{C_1 + C_{TL}}{C_C}$ 项有一下 7 项多项式：

$$\begin{aligned} \bullet \quad &\frac{\frac{g_{m1}}{3} W_6 L_6 C_{ox} + W_6 L_D C_{ox}}{C_C} = \frac{\sqrt{\mu_p \frac{W_1}{L_1} \left(\frac{W_5}{L_5}\right)^2}}{\sqrt{4\mu_n \frac{W_3}{L_3} \left(\frac{W_7}{L_7}\right)^2}} \cdot \frac{\frac{2}{3} W_6 L_6 C_{ox} + W_6 L_D C_{ox}}{C_C} \\ &= C_{ox} \frac{2}{3} \sqrt{\frac{\mu_p}{\mu_n}} \cdot W_1^{0.5} W_3^{0.5} L_1^{-0.5} L_3^{1.5} C_C^{-1} + C_{ox} L_D \sqrt{\frac{\mu_p}{\mu_n}} \cdot W_1^{0.5} W_3^{0.5} L_1^{-0.5} L_3^{0.5} C_C^{-1} \end{aligned}$$

- $$\frac{g_{m1}}{g_{m6}} \cdot \frac{\left(\frac{C_{jp}L_d + C_{jdw_p}}{(1+\frac{V_{DD}-V_{TN}-\Delta V-V_{SS})^{\frac{1}{2}}}{\varphi_o}} + C_{ox}L_D \right) W_2}{C_C} = \frac{\sqrt{\mu_p \frac{W_1}{L_1} (\frac{W_5}{L_5})^2} \left(\frac{C_{jp}L_d + C_{jdw_p}}{(1+\frac{V_{DD}-V_{TN}-\Delta V-V_{SS})^{\frac{1}{2}}}{\varphi_o}} + C_{ox}L_D \right) W_2}{\sqrt{4\mu_n \frac{W_3}{L_3} (\frac{W_7}{L_7})^2} C_C}$$
- $$= \left(\frac{C_{jp}L_d + C_{jdw_p}}{(1+\frac{V_{DD}-V_{TN}-\Delta V-V_{SS})^{\frac{1}{2}}}{\varphi_o}} + C_{ox}L_D \right) \sqrt{\frac{\mu_p}{4\mu_n}} W_1^{1.5} W_3^{-0.5} W_5 W_7^{-1} L_1^{-0.5} L_3^{0.5} L_5^{-1} L_7 C_C^{-1}$$
- $$\frac{g_{m1}}{g_{m6}} \cdot \frac{\left(\frac{C_{jn}L_d + C_{jdwn}}{(1+\frac{V_{TN}+\Delta V}{\varphi_o})^{\frac{1}{2}}} + C_{ox}L_D \right) W_4}{C_C} = \frac{\sqrt{\mu_p \frac{W_1}{L_1} (\frac{W_5}{L_5})^2} \left(\frac{C_{jn}L_d + C_{jdwn}}{(1+\frac{V_{TN}+\Delta V}{\varphi_o})^{\frac{1}{2}}} + C_{ox}L_D \right) W_4}{\sqrt{4\mu_n \frac{W_3}{L_3} (\frac{W_7}{L_7})^2} C_C}$$
- $$= \left(\frac{C_{jn}L_d + C_{jdwn}}{(1+\frac{V_{TN}+\Delta V}{\varphi_o})^{\frac{1}{2}}} + C_{ox}L_D \right) \sqrt{\frac{\mu_p}{4\mu_n}} W_1^{0.5} W_3^{0.5} W_5 W_7^{-1} L_1^{-0.5} L_3^{0.5} L_5^{-1} L_7 C_C^{-1}$$
- $$\frac{g_{m1}}{g_{m6}} \cdot \frac{\frac{2C_{jdw_p}L_d}{(1+\frac{V_{DD}-V_{TN}-\Delta V-V_{SS})^{\frac{1}{2}}}{\varphi_o} + \frac{2C_{jdwn}L_d}{(1+\frac{V_{TN}+\Delta V}{\varphi_o})^{\frac{1}{2}}}}{C_C} = \frac{\sqrt{\mu_p \frac{W_1}{L_1} (\frac{W_5}{L_5})^2} \frac{2C_{jdw_p}L_d}{(1+\frac{V_{DD}-V_{TN}-\Delta V-V_{SS})^{\frac{1}{2}}}{\varphi_o} + \frac{2C_{jdwn}L_d}{(1+\frac{V_{TN}+\Delta V}{\varphi_o})^{\frac{1}{2}}}}{\sqrt{4\mu_n \frac{W_3}{L_3} (\frac{W_7}{L_7})^2} C_C}$$
- $$= \left(\frac{2C_{jdw_p}L_d}{(1+\frac{V_{DD}-V_{TN}-\Delta V-V_{SS})^{\frac{1}{2}}}{\varphi_o} + \frac{2C_{jdwn}L_d}{(1+\frac{V_{TN}+\Delta V}{\varphi_o})^{\frac{1}{2}}} \right) \sqrt{\frac{\mu_p}{4\mu_n}} W_1^{0.5} W_3^{-0.5} W_5 W_7^{-1} L_1^{-0.5} L_3^{0.5} L_5^{-1} L_7 C_C^{-1}$$
- $$\frac{g_{m1}}{g_{m6}} \cdot \frac{\left(C_L + \frac{2(C_{jdwn} + C_{jdw_p})L_d}{(1+\frac{V_{DD}-V_{SS})^{\frac{1}{2}}}{2\varphi_o} \right)}{C_C} = \frac{\sqrt{\mu_p \frac{W_1}{L_1} (\frac{W_5}{L_5})^2} \left(C_L + \frac{2(C_{jdwn} + C_{jdw_p})L_d}{(1+\frac{V_{DD}-V_{SS})^{\frac{1}{2}}}{2\varphi_o} \right)}{\sqrt{4\mu_n \frac{W_3}{L_3} (\frac{W_7}{L_7})^2} C_C}$$
- $$= \left(C_L + \frac{2(C_{jdwn} + C_{jdw_p})L_d}{(1+\frac{V_{DD}-V_{SS})^{\frac{1}{2}}}{2\varphi_o} \right) \sqrt{\frac{\mu_p}{4\mu_n}} W_1^{0.5} W_3^{-0.5} W_5 W_7^{-1} L_1^{-0.5} L_3^{0.5} L_5^{-1} L_7 C_C^{-1}$$

- $$\frac{g_{m1}}{g_{m6}} \cdot \frac{\left(\begin{array}{l} \frac{C_{jn}L_d + C_{jdw_n}}{(1+\frac{V_{DD}-V_{SS}}{2\varphi_o})^{\frac{1}{2}}} + C_{ox}L_D \\ \end{array} \right) W_6}{C_C} = \frac{\sqrt{\mu_p \frac{W_1}{L_1} (\frac{W_5}{L_5})^2}}{\sqrt{4\mu_n \frac{W_3}{L_3} (\frac{W_7}{L_7})^2}} \cdot \frac{\left(\begin{array}{l} \frac{C_{jn}L_d + C_{jdw_n}}{(1+\frac{V_{DD}-V_{SS}}{2\varphi_o})^{\frac{1}{2}}} + C_{ox}L_D \\ \end{array} \right) W_6}{C_C}$$
- $$= \left(\begin{array}{l} \frac{C_{jn}L_d + C_{jdw_n}}{(1+\frac{V_{DD}-V_{SS}}{2\varphi_o})^{\frac{1}{2}}} + C_{ox}L_D \\ \end{array} \right) \sqrt{\frac{\mu_p}{\mu_n}} \cdot W_1^{0.5} W_3^{0.5} L_1^{-0.5} L_3^{0.5} C_C^{-1}$$
- $$\frac{g_{m1}}{g_{m6}} \cdot \frac{\left(\begin{array}{l} \frac{C_{jp}L_d + C_{jdwp}}{(1+\frac{V_{DD}-V_{SS}}{2\varphi_o})^{\frac{1}{2}}} + C_{ox}L_D \\ \end{array} \right) W_7}{C_C} = \frac{\sqrt{\mu_p \frac{W_1}{L_1} (\frac{W_5}{L_5})^2}}{\sqrt{4\mu_n \frac{W_3}{L_3} (\frac{W_7}{L_7})^2}} \cdot \frac{\left(\begin{array}{l} \frac{C_{jp}L_d + C_{jdwp}}{(1+\frac{V_{DD}-V_{SS}}{2\varphi_o})^{\frac{1}{2}}} + C_{ox}L_D \\ \end{array} \right) W_7}{C_C}$$
- $$= \left(\begin{array}{l} \frac{C_{jp}L_d + C_{jdwp}}{(1+\frac{V_{DD}-V_{SS}}{2\varphi_o})^{\frac{1}{2}}} + C_{ox}L_D \\ \end{array} \right) \sqrt{\frac{\mu_p}{4\mu_n}} \cdot W_1^{0.5} W_3^{-0.5} W_5 L_1^{-0.5} L_3^{0.5} L_5^{-1} L_7 C_C^{-1}$$

$\frac{g_{m1}}{g_{m6}} \cdot \frac{C_l C_{TL}}{C_C^2}$ 项有一下 12 项多项式：

- $$\frac{g_{m1}}{g_{m6}} \cdot \frac{(C_L + \frac{2(C_{jdw_n} + C_{jdwp})L_d}{(1+\frac{V_{DD}-V_{SS}}{2\varphi_o})^{\frac{1}{2}}}) \frac{2}{3} W_6 L_6 C_{ox} + W_6 L_D C_{ox}}{C_C^2} = \frac{\sqrt{\mu_p \frac{W_1}{L_1} (\frac{W_5}{L_5})^2}}{\sqrt{4\mu_n \frac{W_3}{L_3} (\frac{W_7}{L_7})^2}} \cdot \frac{(C_L + \frac{2(C_{jdw_n} + C_{jdwp})L_d}{(1+\frac{V_{DD}-V_{SS}}{2\varphi_o})^{\frac{1}{2}}}) \frac{2}{3} W_6 L_6 C_{ox} + W_6 L_D C_{ox}}{C_C^2}$$
- $$= (C_L + \frac{2(C_{jdw_n} + C_{jdwp})L_d}{(1+\frac{V_{DD}-V_{SS}}{2\varphi_o})^{\frac{1}{2}}}) C_{ox} \frac{2}{3} \sqrt{\frac{\mu_p}{\mu_n}} \cdot W_1^{0.5} W_3^{0.5} L_1^{-0.5} L_3^{1.5} C_C^{-2} + (C_L + \frac{2(C_{jdw_n} + C_{jdwp})L_d}{(1+\frac{V_{DD}-V_{SS}}{2\varphi_o})^{\frac{1}{2}}}) C_{ox} L_D \sqrt{\frac{\mu_p}{\mu_n}} \cdot W_1^{0.5} W_3^{0.5} L_1^{-0.5} L_3^{0.5} C_C^{-2}$$
- $$\frac{g_{m1}}{g_{m6}} \cdot \frac{(C_L + \frac{2(C_{jdw_n} + C_{jdwp})L_d}{(1+\frac{V_{DD}-V_{SS}}{2\varphi_o})^{\frac{1}{2}}}) \left(\begin{array}{l} \frac{C_{jp}L_d + C_{jdwp}}{(1+\frac{V_{DD}-V_{IN}-\Delta V-V_{SS}}{2\varphi_o})^{\frac{1}{2}}} + C_{ox}L_D \\ \end{array} \right) W_2}{C_C^2} = \frac{\sqrt{\mu_p \frac{W_1}{L_1} (\frac{W_5}{L_5})^2}}{\sqrt{4\mu_n \frac{W_3}{L_3} (\frac{W_7}{L_7})^2}} (C_L + \frac{2(C_{jdw_n} + C_{jdwp})L_d}{(1+\frac{V_{DD}-V_{SS}}{2\varphi_o})^{\frac{1}{2}}}) \left(\begin{array}{l} \frac{C_{jp}L_d + C_{jdwp}}{(1+\frac{V_{DD}-V_{IN}-\Delta V-V_{SS}}{2\varphi_o})^{\frac{1}{2}}} + C_{ox}L_D \\ \end{array} \right) W_2$$

$$\begin{aligned}
&= \left(C_L + \frac{2(C_{jdn} + C_{jdp})L_d}{(1 + \frac{V_{DD} - V_{SS}}{2\varphi_o})^2} \right) \left(\frac{C_{jn}L_d + C_{jdn}}{(1 + \frac{V_{DN} - V_{TN} - \Delta V - V_{SS}}{\varphi_o})^2} + C_{ox}L_D \right) \sqrt{\frac{\mu_p}{4\mu_n}} W_1^{1.5} W_3^{0.5} W_5 W_7^{-1} L_1^{0.5} L_3^{0.5} L_5^{-1} L_7 C_C^2 \\
\bullet &\quad \frac{g_m \cdot (C_L + \frac{2(C_{jdn} + C_{jdp})L_d}{(1 + \frac{V_{DD} - V_{SS}}{2\varphi_o})^2})}{C_C^2} = \frac{\sqrt{\frac{\mu_p}{4\mu_n}} \frac{W_1 W_5}{L_1 L_5} (C_L + \frac{2(C_{jdn} + C_{jdp})L_d}{(1 + \frac{V_{DD} - V_{SS}}{2\varphi_o})^2})}{\sqrt{\frac{W_3 W_7}{4\mu_n L_3 L_7}} (C_L + \frac{2(C_{jdn} + C_{jdp})L_d}{(1 + \frac{V_{DD} - V_{SS}}{2\varphi_o})^2})} \frac{W_4}{C_C^2} \\
&= \left(C_L + \frac{2(C_{jdn} + C_{jdp})L_d}{(1 + \frac{V_{DD} - V_{SS}}{2\varphi_o})^2} \right) \left(\frac{C_{jn}L_d + C_{jdn}}{(1 + \frac{V_{TN} + \Delta V}{\varphi_o})^2} + C_{ox}L_D \right) \sqrt{\frac{\mu_p}{4\mu_n}} W_1^{0.5} W_3^{0.5} W_5 W_7^{-1} L_1^{0.5} L_3^{0.5} L_5^{-1} L_7 C_C^2 \\
\bullet &\quad \frac{\frac{g_m \cdot (C_L + \frac{2(C_{jdn} + C_{jdp})L_d}{(1 + \frac{V_{DD} - V_{SS}}{2\varphi_o})^2})}{C_C^2}}{\sqrt{\frac{W_3 W_7}{4\mu_n L_3 L_7}} (C_L + \frac{2(C_{jdn} + C_{jdp})L_d}{(1 + \frac{V_{DD} - V_{SS}}{2\varphi_o})^2})} = \frac{\frac{\frac{\mathcal{X}_{jdp}L_d}{(1 + \frac{V_D - V_N - \Delta V - V_{SS}}{\varphi_o})^2} + \frac{\mathcal{X}_{jdn}L_d}{(1 + \frac{V_N + \Delta V}{\varphi_o})^2}}{\sqrt{\frac{\mu_p}{4\mu_n}} \frac{W_1 W_5}{L_1 L_5}}}{\frac{\frac{\mathcal{X}_{jdp}L_d}{(1 + \frac{V_D - V_N - \Delta V - V_{SS}}{\varphi_o})^2} + \frac{\mathcal{X}_{jdn}L_d}{(1 + \frac{V_N + \Delta V}{\varphi_o})^2}}{\sqrt{\frac{W_3 W_7}{4\mu_n L_3 L_7}} (C_L + \frac{2(C_{jdn} + C_{jdp})L_d}{(1 + \frac{V_{DD} - V_{SS}}{2\varphi_o})^2})}} \\
&= \left(C_L + \frac{2(C_{jdn} + C_{jdp})L_d}{(1 + \frac{V_{DD} - V_{SS}}{2\varphi_o})^2} \right) \left(\frac{2C_{jdp}L_d}{(1 + \frac{V_{DD} - V_{TN} - \Delta V - V_{SS}}{\varphi_o})^2} + \frac{2C_{jdn}L_d}{(1 + \frac{V_{TN} + \Delta V}{\varphi_o})^2} \right) \sqrt{\frac{\mu_p}{4\mu_n}} W_1^{0.5} W_3^{0.5} W_5 W_7^{-1} L_1^{0.5} L_3^{0.5} L_5^{-1} L_7 C_C^2 \\
\bullet &\quad \frac{\frac{g_m \cdot (C_L + \frac{2(C_{jdn} + C_{jdp})L_d}{(1 + \frac{V_{DD} - V_{SS}}{2\varphi_o})^2})}{C_C^2}}{\sqrt{\frac{W_3 W_7}{4\mu_n L_3 L_7}} (C_L + \frac{2(C_{jdn} + C_{jdp})L_d}{(1 + \frac{V_{DD} - V_{SS}}{2\varphi_o})^2})} = \frac{\frac{\frac{2}{3} W_6 L_6 C_{ox} + W_6 L_D C_{ox}}{\sqrt{\frac{\mu_p}{4\mu_n}} \frac{W_1 W_5}{L_1 L_5}}}{\frac{\frac{2}{3} W_6 L_6 C_{ox} + W_6 L_D C_{ox}}{\sqrt{\frac{W_3 W_7}{4\mu_n L_3 L_7}} (C_L + \frac{2(C_{jdn} + C_{jdp})L_d}{(1 + \frac{V_{DD} - V_{SS}}{2\varphi_o})^2})}} \\
&= C_{ox} \frac{4}{3} \left(\frac{C_{jn}L_d + C_{jdn}}{(1 + \frac{V_{DD} - V_{SS}}{2\varphi_o})^2} + C_{ox}L_D \right) \sqrt{\frac{\mu_p}{\mu_n}} \cdot W_1^{0.5} W_3^{1.5} W_5^{1.5} W_7^{-1} W_1 L_1^{0.5} L_3^{0.5} L_5^{-1} C_C^2 + 2C_{ox}L_D \left(\frac{C_{jn}L_d + C_{jdn}}{(1 + \frac{V_{DD} - V_{SS}}{2\varphi_o})^2} + C_{ox}L_D \right) \sqrt{\frac{\mu_p}{\mu_n}} \cdot W_1^{0.5} W_3^{1.5} W_5^{1.5} W_7^{-1} W_1 L_1^{0.5} L_3^{0.5} L_5^{-1} C_C^2 \\
\bullet &\quad \frac{\frac{g_m \cdot (C_L + \frac{2(C_{jdn} + C_{jdp})L_d}{(1 + \frac{V_{DD} - V_{SS}}{2\varphi_o})^2})}{C_C^2}}{\sqrt{\frac{W_3 W_7}{4\mu_n L_3 L_7}} (C_L + \frac{2(C_{jdn} + C_{jdp})L_d}{(1 + \frac{V_{DD} - V_{SS}}{2\varphi_o})^2})} = \frac{\sqrt{\frac{\mu_p}{4\mu_n}} \frac{W_1 W_5}{L_1 L_5} \left(\frac{C_{jn}L_d + C_{jdn}}{(1 + \frac{V_{DD} - V_{TN} - \Delta V - V_{SS}}{\varphi_o})^2} + C_{ox}L_D \right)}{\sqrt{\frac{W_3 W_7}{4\mu_n L_3 L_7}} \left(\frac{C_{jn}L_d + C_{jdn}}{(1 + \frac{V_{DD} - V_{TN} - \Delta V - V_{SS}}{\varphi_o})^2} + C_{ox}L_D \right)} \frac{W_2}{C_C^2} \\
&= \left(\frac{C_{jn}L_d + C_{jdn}}{(1 + \frac{V_{DD} - V_{SS}}{2\varphi_o})^2} + C_{ox}L_D \right) \left(\frac{C_{jp}L_d + C_{jdp}}{(1 + \frac{V_{DD} - V_{TN} - \Delta V - V_{SS}}{\varphi_o})^2} + C_{ox}L_D \right) \sqrt{\frac{\mu_p}{\mu_n}} W_1^{1.5} W_3^{0.5} L_1^{0.5} L_3^{0.5} C_C^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \bullet \frac{\frac{g_{ml}}{g_{m6}} \left(\frac{C_{jn}L_d + C_{jdw}}{(1+\frac{V_{DD}-V_{SS}}{2\varphi_o})^{\frac{1}{2}}} + C_{ox}L_D \right) W_6}{\frac{C_{jn}L_d + C_{jdw}}{(1+\frac{V_{DD}-V_{SS}}{2\varphi_o})^{\frac{1}{2}}} + C_{ox}L_D} = \sqrt{\frac{\mu_p}{4\mu_n}} \frac{\left(\frac{C_{jn}L_d + C_{jdw}}{(1+\frac{V_{TN}+\Delta V}{2\varphi_o})^{\frac{1}{2}}} + C_{ox}L_D \right) W_6}{\left(\frac{C_{jn}L_d + C_{jdw}}{(1+\frac{V_{DD}-V_{SS}}{2\varphi_o})^{\frac{1}{2}}} + C_{ox}L_D \right) W_6} \\
& = \left(\frac{C_{jn}L_d + C_{jdw}}{(1+\frac{V_{DD}-V_{SS}}{2\varphi_o})^{\frac{1}{2}}} + C_{ox}L_D \right) \sqrt{\frac{\mu_p}{\mu_n}} W_1^{0.5} W_3^{1.5} L_1^{-0.5} L_3^{0.5} C_C^{-2} \\
& \bullet \frac{\frac{g_{ml}}{g_{m6}} \left(\frac{2C_{jdw}L_d}{(1+\frac{V_{DD}-V_{TN}-\Delta V-V_{SS}}{2\varphi_o})^{\frac{1}{2}}} + \frac{2C_{jdw}L_d}{(1+\frac{V_{TN}+\Delta V}{2\varphi_o})^{\frac{1}{2}}} \right)}{\frac{C_{jn}L_d + C_{jdw}}{(1+\frac{V_{DD}-V_{SS}}{2\varphi_o})^{\frac{1}{2}}} + C_{ox}L_D} = \sqrt{\frac{\mu_p}{4\mu_n}} \frac{\left(\frac{2C_{jdw}L_d}{(1+\frac{V_{DD}-V_{TN}-\Delta V-V_{SS}}{2\varphi_o})^{\frac{1}{2}}} + \frac{2C_{jdw}L_d}{(1+\frac{V_{TN}+\Delta V}{2\varphi_o})^{\frac{1}{2}}} \right) W_6}{\left(\frac{C_{jn}L_d + C_{jdw}}{(1+\frac{V_{DD}-V_{SS}}{2\varphi_o})^{\frac{1}{2}}} + C_{ox}L_D \right) W_6} \\
& = \left(\frac{C_{jn}L_d + C_{jdw}}{(1+\frac{V_{DD}-V_{SS}}{2\varphi_o})^{\frac{1}{2}}} + C_{ox}L_D \right) \left(\frac{2C_{jdw}L_d}{(1+\frac{V_{DD}-V_{TN}-\Delta V-V_{SS}}{2\varphi_o})^{\frac{1}{2}}} + \frac{2C_{jdw}L_d}{(1+\frac{V_{TN}+\Delta V}{2\varphi_o})^{\frac{1}{2}}} \right) \sqrt{\frac{\mu_p}{\mu_n}} W_1^{0.5} W_3^{0.5} L_1^{-0.5} L_3^{0.5} C_C^{-2} \\
& \bullet \frac{\frac{g_{ml}}{g_{m6}} \left(\frac{2W_6L_6C_{ox} + W_6L_DC_{ox}}{(1+\frac{V_{DD}-V_{SS}}{2\varphi_o})^{\frac{1}{2}}} \right)}{\frac{C_{jn}L_d + C_{jdw}}{(1+\frac{V_{DD}-V_{SS}}{2\varphi_o})^{\frac{1}{2}}} + C_{ox}L_D} = \sqrt{\frac{\mu_p}{4\mu_n}} \frac{\left(\frac{2W_6L_6C_{ox} + W_6L_DC_{ox}}{(1+\frac{V_{DD}-V_{SS}}{2\varphi_o})^{\frac{1}{2}}} \right) W_7}{\left(\frac{C_{jn}L_d + C_{jdw}}{(1+\frac{V_{DD}-V_{SS}}{2\varphi_o})^{\frac{1}{2}}} + C_{ox}L_D \right) W_7} \\
& = C_{ox} \frac{2}{3} \left(\frac{C_{jp}L_d + C_{jdp}}{(1+\frac{V_{DD}-V_{SS}}{2\varphi_o})^{\frac{1}{2}}} + C_{ox}L_D \right) \sqrt{\frac{\mu_p}{\mu_n}} \cdot W_1^{0.5} W_3^{0.5} W_7 L_1^{0.5} L_3^{1.5} C_C^{-2} + C_{ox}L_D \left(\frac{C_{jp}L_d + C_{jdp}}{(1+\frac{V_{DD}-V_{SS}}{2\varphi_o})^{\frac{1}{2}}} + C_{ox}L_D \right) \sqrt{\frac{\mu_p}{\mu_n}} \cdot W_1^{0.5} W_3^{0.5} W_7 L_1^{0.5} L_3^{0.5} C_C^{-2} \\
& \bullet \frac{\frac{g_{ml}}{g_{m6}} \left(\frac{C_{jp}L_d + C_{jdp}}{(1+\frac{V_{DD}-V_{TN}-\Delta V-V_{SS}}{2\varphi_o})^{\frac{1}{2}}} + C_{ox}L_D \right) W_7}{\frac{C_{jp}L_d + C_{jdp}}{(1+\frac{V_{DD}-V_{SS}}{2\varphi_o})^{\frac{1}{2}}} + C_{ox}L_D} = \sqrt{\frac{\mu_p}{4\mu_n}} \frac{\left(\frac{C_{jp}L_d + C_{jdp}}{(1+\frac{V_{DD}-V_{TN}-\Delta V-V_{SS}}{2\varphi_o})^{\frac{1}{2}}} + C_{ox}L_D \right) W_7}{\left(\frac{C_{jp}L_d + C_{jdp}}{(1+\frac{V_{DD}-V_{SS}}{2\varphi_o})^{\frac{1}{2}}} + C_{ox}L_D \right) W_7} \\
& = \left(\frac{C_{jp}L_d + C_{jdp}}{(1+\frac{V_{DD}-V_{TN}-\Delta V-V_{SS}}{2\varphi_o})^{\frac{1}{2}}} + C_{ox}L_D \right) \sqrt{\frac{\mu_p}{4\mu_n}} W_1^{1.5} W_3^{-0.5} W_5 L_1^{-0.5} L_3^{0.5} L_5^{-1} L_7 C_C^{-2} \\
& \bullet \frac{\frac{g_{ml}}{g_{m6}} \left(\frac{C_{jn}L_d + C_{jdw}}{(1+\frac{V_{TN}+\Delta V}{2\varphi_o})^{\frac{1}{2}}} + C_{ox}L_D \right) W_4}{\frac{C_{jn}L_d + C_{jdw}}{(1+\frac{V_{DD}-V_{SS}}{2\varphi_o})^{\frac{1}{2}}} + C_{ox}L_D} = \sqrt{\frac{\mu_p}{4\mu_n}} \frac{\left(\frac{C_{jn}L_d + C_{jdw}}{(1+\frac{V_{TN}+\Delta V}{2\varphi_o})^{\frac{1}{2}}} + C_{ox}L_D \right) W_7}{\left(\frac{C_{jn}L_d + C_{jdw}}{(1+\frac{V_{DD}-V_{SS}}{2\varphi_o})^{\frac{1}{2}}} + C_{ox}L_D \right) W_7} \\
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{C_{jp}L_d + C_{jdw_p}}{(1 + \frac{V_{DD} - V_{TN} - \Delta V - V_{SS}}{2\varphi_o})^{\frac{1}{2}}} + C_{ox}L_D \right) \left(\frac{C_{jn}L_d + C_{jdwn}}{(1 + \frac{V_{TN} + \Delta V}{\varphi_o})^{\frac{1}{2}}} + C_{ox}L_D \right) \sqrt{\frac{\mu_p}{4\mu_n}} W_1^{0.5} W_3^{0.5} W_5 L_1^{-0.5} L_3^{0.5} L_5^{-1} L_7 C_C^{-2} \\
\bullet &\quad \frac{g_{m1}}{g_{m3}} \cdot \left(\frac{C_{jp}L_d + C_{jdw_p}}{(1 + \frac{V_{DD} - V_{TN} - \Delta V - V_{SS}}{2\varphi_o})^{\frac{1}{2}}} + C_{ox}L_D \right) W_7 \frac{\frac{2C_{jdw_p}L_d}{(1 + \frac{V_{DD} - V_{TN} - \Delta V - V_{SS}}{2\varphi_o})^{\frac{1}{2}}} + \frac{2C_{jdwn}L_d}{(1 + \frac{V_{TN} + \Delta V}{\varphi_o})^{\frac{1}{2}}}}{C_C^2} = \frac{\sqrt{\mu_p} \frac{W_1}{L_1} (\frac{W_7}{L_7})^2}{\sqrt{4\mu_n} \frac{W_3}{L_3} (\frac{W_7}{L_7})^2} \cdot \left(\frac{C_{jp}L_d + C_{jdw_p}}{(1 + \frac{V_{DD} - V_{TN} - \Delta V - V_{SS}}{2\varphi_o})^{\frac{1}{2}}} + C_{ox}L_D \right) W_7 \frac{\frac{2C_{jdw_p}L_d}{(1 + \frac{V_{DD} - V_{TN} - \Delta V - V_{SS}}{2\varphi_o})^{\frac{1}{2}}} + \frac{2C_{jdwn}L_d}{(1 + \frac{V_{TN} + \Delta V}{\varphi_o})^{\frac{1}{2}}}}{C_C^2} \\
&= \left(\frac{C_{jp}L_d + C_{jdw_p}}{(1 + \frac{V_{DD} - V_{TN} - \Delta V - V_{SS}}{2\varphi_o})^{\frac{1}{2}}} + C_{ox}L_D \right) \left(\frac{2C_{jdw_p}L_d}{(1 + \frac{V_{DD} - V_{TN} - \Delta V - V_{SS}}{2\varphi_o})^{\frac{1}{2}}} + \frac{2C_{jdwn}L_d}{(1 + \frac{V_{TN} + \Delta V}{\varphi_o})^{\frac{1}{2}}} \right) \sqrt{\frac{\mu_p}{4\mu_n}} W_1^{0.5} W_3^{0.5} W_5 L_1^{-0.5} L_3^{0.5} L_5^{-1} L_7 C_C^{-2} \\
\text{第三极点 } &\frac{\omega_u}{\omega_{p_3}} = \frac{C_C}{\frac{g_{m3}}{C_2}} = \frac{g_{m1}}{g_{m3}} \cdot \frac{C_2}{C_C} \\
\text{其中 } &C_2 = C_{gs3} + C_{gs4} + C_{db1} + C_{db3} + C_{gd1} \\
&= \frac{4}{3} W_3 L_3 C_{ox} + 2 W_3 L_D C_{ox} + \left(\frac{C_{jp}L_d + C_{jdw_p}}{(1 + \frac{V_{DD} - V_{TN} - \Delta V - V_{SS}}{2\varphi_o})^{\frac{1}{2}}} + C_{ox}L_D \right) W_1 + \frac{C_{jn}L_d + C_{jdwn}}{(1 + \frac{V_{TN} + \Delta V}{\varphi_o})^{\frac{1}{2}}} W_3 + \left(\frac{2C_{jdw_p}L_d}{(1 + \frac{V_{DD} - V_{TN} - \Delta V - V_{SS}}{2\varphi_o})^{\frac{1}{2}}} + \frac{2C_{jdwn}L_d}{(1 + \frac{V_{TN} + \Delta V}{\varphi_o})^{\frac{1}{2}}} \right) \\
\text{共有 5 项} \\
\bullet &\quad \frac{g_{m1}}{g_{m3}} \cdot \frac{\frac{4}{3} W_3 L_3 C_{ox} + 2 W_3 L_D C_{ox}}{C_C} = \frac{\sqrt{\mu_p} \frac{W_1}{L_1} \frac{4}{3} W_3 L_3 C_{ox} + 2 W_3 L_D C_{ox}}{\sqrt{\mu_n} \frac{W_3}{L_3} C_C} \\
&= \frac{4}{3} C_{ox} \sqrt{\frac{\mu_p}{\mu_n}} W_1^{0.5} W_3^{0.5} L_1^{-0.5} L_3^{1.5} C_C^{-1} + 2 C_{ox} L_D \sqrt{\frac{\mu_p}{\mu_n}} W_1^{0.5} W_3^{0.5} L_1^{-0.5} L_3^{0.5} C_C^{-1} \\
\bullet &\quad \frac{g_{m1}}{g_{m3}} \cdot \frac{\left(\frac{C_{jp}L_d + C_{jdw_p}}{(1 + \frac{V_{DD} - V_{TN} - \Delta V - V_{SS}}{2\varphi_o})^{\frac{1}{2}}} + C_{ox}L_D \right) W_1}{C_C} = \frac{\sqrt{\mu_p} \frac{W_1}{L_1} \left(\frac{C_{jp}L_d + C_{jdw_p}}{(1 + \frac{V_{DD} - V_{TN} - \Delta V - V_{SS}}{2\varphi_o})^{\frac{1}{2}}} + C_{ox}L_D \right) W_1}{\sqrt{\mu_n} \frac{W_3}{L_3} C_C} \\
&= \left(\frac{C_{jp}L_d + C_{jdw_p}}{(1 + \frac{V_{DD} - V_{TN} - \Delta V - V_{SS}}{2\varphi_o})^{\frac{1}{2}}} + C_{ox}L_D \right) \sqrt{\frac{\mu_p}{\mu_n}} \cdot W_1^{1.5} W_3^{-0.5} L_1^{-0.5} L_3^{0.5} C_C^{-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \bullet \frac{\frac{C_{jn}L_d + C_{jdwn}}{(1+\frac{V_{TN}+\Delta V}{\varphi_o})^{\frac{1}{2}}}W_3}{g_{m3} \cdot \frac{C_C}{\sqrt{\mu_p \frac{W_1}{L_1}}}} = \frac{\frac{C_{jn}L_d + C_{jdwn}}{(1+\frac{V_{TN}+\Delta V}{\varphi_o})^{\frac{1}{2}}}W_3}{\sqrt{\mu_n \frac{W_3}{L_3}} \cdot \frac{C_C}{\sqrt{\mu_p \frac{W_1}{L_1}}}} \\
& = \frac{C_{jn}L_d + C_{jdwn}}{(1+\frac{V_{TN}+\Delta V}{\varphi_o})^{\frac{1}{2}}} \sqrt{\frac{\mu_p}{\mu_n}} \cdot W_1^{0.5} W_3^{0.5} L_1^{-0.5} L_3^{0.5} C_C^{-1} \\
& \bullet \frac{\frac{g_{m1}}{(1+\frac{V_{DD}-V_{TN}-\Delta V-V_{SS}}{\varphi_o})^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{2C_{jdwp}L_d}{(1+\frac{V_{TN}+\Delta V}{\varphi_o})^{\frac{1}{2}}}}{g_{m3} \cdot \frac{C_C}{\sqrt{\mu_p \frac{W_1}{L_1}}}} = \frac{\frac{g_{m1}}{(1+\frac{V_{DD}-V_{TN}-\Delta V-V_{SS}}{\varphi_o})^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{2C_{jdwn}L_d}{(1+\frac{V_{TN}+\Delta V}{\varphi_o})^{\frac{1}{2}}}}{\sqrt{\mu_n \frac{W_3}{L_3}} \cdot \frac{C_C}{\sqrt{\mu_p \frac{W_1}{L_1}}}} \\
& = \left(\frac{2C_{jdwp}L_d}{(1+\frac{V_{DD}-V_{TN}-\Delta V-V_{SS}}{\varphi_o})^{\frac{1}{2}}} + \frac{2C_{jdwn}L_d}{(1+\frac{V_{TN}+\Delta V}{\varphi_o})^{\frac{1}{2}}} \right) \sqrt{\frac{\mu_p}{\mu_n}} \cdot W_1^{0.5} W_3^{-0.5} L_1^{-0.5} L_3^{0.5} C_C^{-1} \\
& \text{第四极点 } \frac{\omega_\mu}{\omega_{p_4}} = \frac{\frac{g_{m1}}{C_C}}{\frac{1}{R_C C_1}} = \frac{\frac{g_{m1}}{C_C}}{\frac{g_{m6}}{C_1}} = \frac{g_{m1}}{g_{m6}} \cdot \frac{C_1}{C_C}, \text{ 共四项}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \bullet \frac{\frac{g_{m1}}{g_{m6}} \cdot \frac{\frac{2}{3}W_6L_6C_{ox} + W_6L_DC_{ox}}{C_C}}{\sqrt{4\mu_n \frac{W_3}{L_3} (\frac{W_7}{L_7})^2}} = \frac{\sqrt{\mu_p \frac{W_1}{L_1} (\frac{W_5}{L_5})^2}}{\sqrt{4\mu_n \frac{W_3}{L_3} (\frac{W_7}{L_7})^2}} \cdot \frac{\frac{2}{3}W_6L_6C_{ox} + W_6L_DC_{ox}}{C_C} \\
& = C_{ox} \frac{2}{3} \sqrt{\frac{\mu_p}{\mu_n}} \cdot W_1^{0.5} W_3^{0.5} L_1^{-0.5} L_3^{1.5} C_C^{-1} + C_{ox} L_D \sqrt{\frac{\mu_p}{\mu_n}} \cdot W_1^{0.5} W_3^{0.5} L_1^{-0.5} L_3^{0.5} C_C^{-1} \\
& \bullet \frac{\frac{g_{m1}}{g_{m6}} \cdot \left(\frac{C_{jp}L_d + C_{jdwp}}{(1+\frac{V_{DD}-V_{TN}-\Delta V-V_{SS}}{\varphi_o})^{\frac{1}{2}}} + C_{ox}L_D \right) W_2}{\sqrt{4\mu_n \frac{W_3}{L_3} (\frac{W_7}{L_7})^2}} = \frac{\sqrt{\mu_p \frac{W_1}{L_1} (\frac{W_5}{L_5})^2}}{\sqrt{4\mu_n \frac{W_3}{L_3} (\frac{W_7}{L_7})^2}} \frac{\left(\frac{C_{jp}L_d + C_{jdwp}}{(1+\frac{V_{DD}-V_{TN}-\Delta V-V_{SS}}{\varphi_o})^{\frac{1}{2}}} + C_{ox}L_D \right) W_2}{C_C} \\
& = \left(\frac{C_{jp}L_d + C_{jdwp}}{(1+\frac{V_{DD}-V_{TN}-\Delta V-V_{SS}}{\varphi_o})^{\frac{1}{2}}} + C_{ox}L_D \right) \sqrt{\frac{\mu_p}{4\mu_n}} W_1^{1.5} W_3^{-0.5} W_5 W_7^{-1} L_1^{-0.5} L_3^{0.5} L_5^{-1} L_7 C_C^{-1}
\end{aligned}$$

- $$\frac{g_{m1}}{g_{m6}} \cdot \frac{\left(\frac{C_{jn}L_d + C_{jdw_n}}{(1 + \frac{V_{TN} + \Delta V}{\varphi_o})^{\frac{1}{2}}} + C_{ox}L_D \right) W_4}{C_C} = \frac{\sqrt{\mu_p \frac{W_1}{L_1} (\frac{W_5}{L_5})^2} \left(\frac{C_{jn}L_d + C_{jdw_n}}{(1 + \frac{V_{TN} + \Delta V}{\varphi_o})^{\frac{1}{2}}} + C_{ox}L_D \right) W_4}{\sqrt{4\mu_n \frac{W_3}{L_3} (\frac{W_7}{L_7})^2} C_C}$$
- $$= \left(\frac{C_{jn}L_d + C_{jdw_n}}{(1 + \frac{V_{TN} + \Delta V}{\varphi_o})^{\frac{1}{2}}} + C_{ox}L_D \right) \sqrt{\frac{\mu_p}{4\mu_n} W_1^{0.5} W_3^{0.5} W_5 W_7^{-1} L_1^{-0.5} L_3^{0.5} L_5^{-1} L_7 C_C^{-1}}$$
- $$\frac{g_{ml}}{g_{m6}} \cdot \frac{\frac{2C_{jdwp}L_d}{(1 + \frac{V_{DD} - V_{TN} - \Delta V - V_{SS}}{\varphi_o})^{\frac{1}{2}}} + \frac{2C_{jdw_n}L_d}{(1 + \frac{V_{TN} + \Delta V}{\varphi_o})^{\frac{1}{2}}}}{C_C} = \frac{\sqrt{\mu_p \frac{W_1}{L_1} (\frac{W_5}{L_5})^2} \frac{2C_{jdwp}L_d}{(1 + \frac{V_{DD} - V_{TN} - \Delta V - V_{SS}}{\varphi_o})^{\frac{1}{2}}} + \frac{2C_{jdw_n}L_d}{(1 + \frac{V_{TN} + \Delta V}{\varphi_o})^{\frac{1}{2}}}}{\sqrt{4\mu_n \frac{W_3}{L_3} (\frac{W_7}{L_7})^2} C_C}$$
- $$= \left(\frac{2C_{jdwp}L_d}{(1 + \frac{V_{DD} - V_{TN} - \Delta V - V_{SS}}{\varphi_o})^{\frac{1}{2}}} + \frac{2C_{jdw_n}L_d}{(1 + \frac{V_{TN} + \Delta V}{\varphi_o})^{\frac{1}{2}}} \right) \sqrt{\frac{\mu_p}{4\mu_n} W_1^{0.5} W_3^{-0.5} W_5 W_7^{-1} L_1^{-0.5} L_3^{0.5} L_5^{-1} L_7 C_C^{-1}}$$

参考文献

1. B.A.Wooley, EE315 Spring 1996 handout #19 & Ali Tabatabaei PS#4 Solution Set
2. Stephen Boyd, Lieven Vandenberghe, “Convex Optimization”, Stanford University CA 94305. Available : <http://www.stanford.edu/class/ee364/reader.pdf>
3. Behzad Razavi, “Design of Analog CMOS Integrated Circuits”, McGraw-Hill, International Edition 2001.
4. P.E. 艾伦, D.R.霍尔伯格 著, 王正华, 叶小琳 译, CMOS 模拟电路设计
5. Prabir C. Maulik, L. Richard Carley, David J. Allstot, “Sizing of Cell-Level Analog Circuits Using Constrained Optimization Techniques”, IEEE Journal of Solid-State Circuits, Vol. 28, pp. 233-241, March 1993.
6. Maria del Mar Hershenson, Stephen P. Boyd, Thomas H. Lee, “Optimal Design of a CMOS Op-amp via Geometric Programming”, Stanford University CA 94305
7. Maria del Mar Hershenson, Stephen P. Boyd, Thomas H. Lee, “Optimal Design of a CMOS Op-amp via Geometric Programming”, IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems, Vol. 20, pp. 1-21, Jan. 2001.
8. Pradip Mandal, V. Visvanathan, “CMOS Op-Amp Sizing Using a Geometric Programming Formulation”, IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems, Vol. 20, pp. 22-38, Jan. 2001.
9. User’s guide and reference manual, “The MOSEK Optimization Toolbox for MATLAB Version 2.0(Build 20). Available: <http://www.mosek.com>